講義内容

2009.10.14

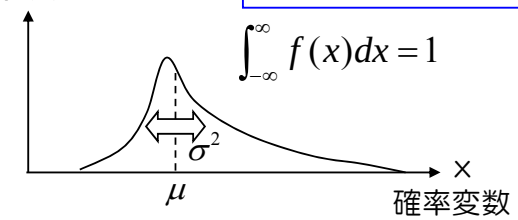
正規分布normal distribution（ガウス分布 Gaussian distribution）

中心極限定理

サンプルからの母集団統計量の推定
（不偏推定量について）

確率変数，確率密度関数

確率密度関数
$f(x)$



確率密度関数は積分したら１．

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

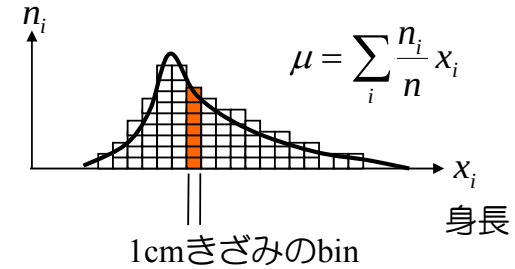
平均：$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$

分散：$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \cdot f(x)dx$

例）ある場所，ある日時での気温の確率．
x：気温，f（x）：気温xが起こる確率

標本平均とのアナロジー（類推） 例）100人の身長の分布と平均・分散

度数（人数）



平均の計算式：

μ=[・・・＋165cm×3人＋166cm×4人＋・・・]/100

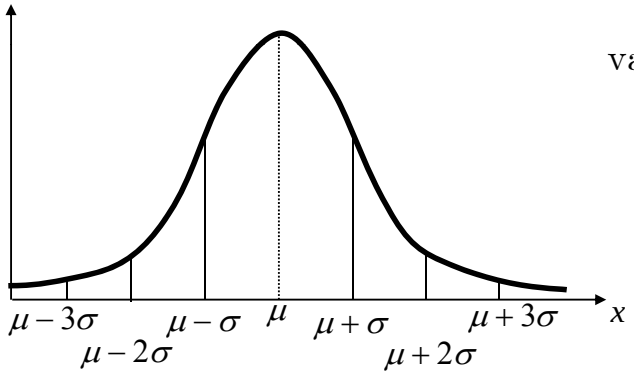
一般に書けば $\mu = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i \times n_i}{n} = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{n_i}{n}$

分散も同様に $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \frac{n_i}{n}$

正規分布（ガウス分布）

確率密度関数

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$



確率変数の範囲と確率（よく用いられる値）

$\mu-\sigma\le x\le\mu+\sigma$ ---- 68.27%

$\mu-2\sigma\le x\le\mu+2\sigma$---- 95.45%

$\mu-3\sigma\le x\le\mu+3\sigma$ ---- 99.73%

$\mu-1.96\sigma\le x\le\mu+1.96\sigma$---- 95%

この分布の平均と分散は，

$$\text{mean}=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\mu$$

$$\text{variance}=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2\cdot f(x)dx=\sigma^2$$

（証明略）

正規分布は平均μと分散σ^2によって完全に記述される．

$N(\mu,\sigma^2)$ と表記する

（Nはnormal distributionのN）

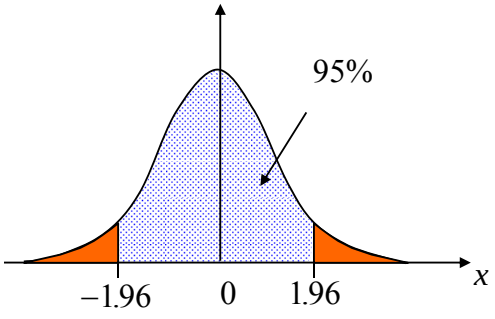
特に，平均０，分散１の正規分布N(0,1)を標準正規分布と呼ぶ．

正規分布（ガウス分布）

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

特に，平均０，分散１の正規分布N(0,1)を標準正規分布と呼ぶ．

標準正規分布 $N(0,1)$



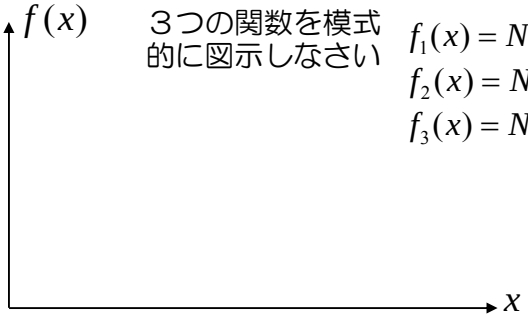
９５%の確率で存在する範囲が統計ではしばしば使われる．
標準正規分布では－１．９６から１．９６の範囲となる．

平均が同じで分散が異なる正規分布

$f(x)$

３つの関数を模式的に図示しなさい

$f_1(x)=N(\mu_0,\sigma_0^2)$
$f_2(x)=N(\mu_0,2\sigma_0^2)$
$f_3(x)=N(\mu_0,3\sigma_0^2)$

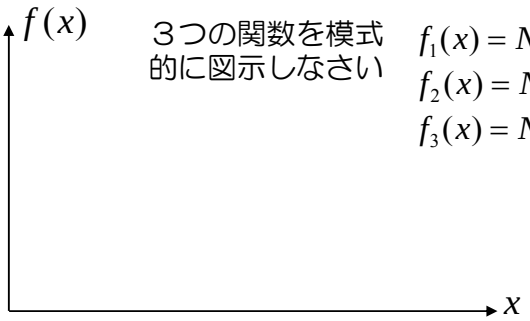


分散が同じで平均が異なる正規分布

$f(x)$

３つの関数を模式的に図示しなさい

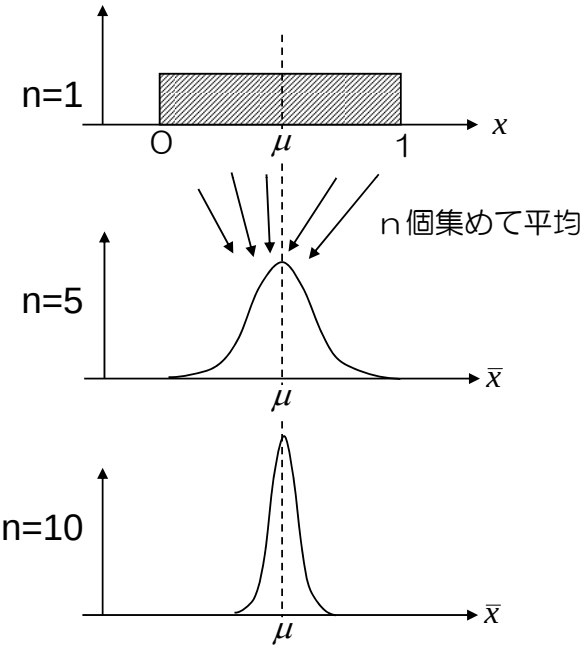
$f_1(x)=N(\mu_0,\sigma_0^2)$
$f_2(x)=N(2\mu_0,\sigma_0^2)$
$f_3(x)=N(3\mu_0,\sigma_0^2)$

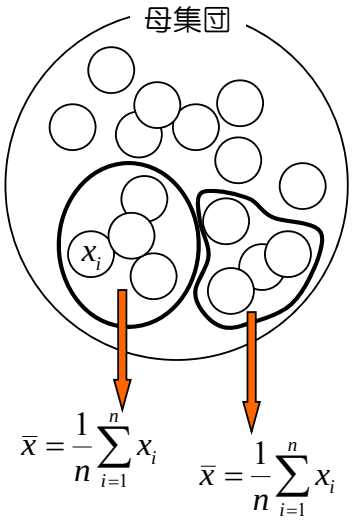


中心極限定理 central limit theorem

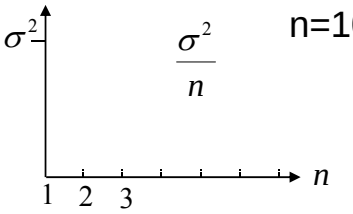
分布がどのようなものであっても，平均値μ，分散σ^2をもつ母集団からとられたｎ個のサンプルの平均値の分布は，ｎが大きくなるとき，正規分布$N(\mu, \sigma^2/n)$に近づく．

例）母集団の分布が一様分布の場合





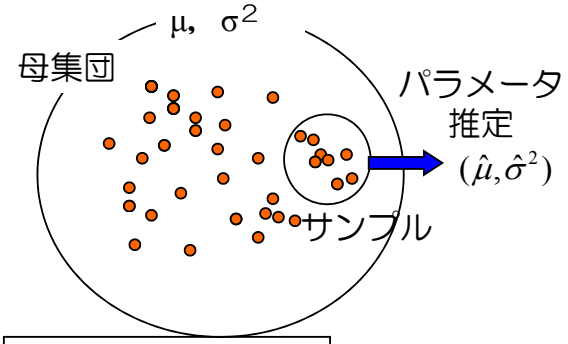
集める個数nが多いほど分散（σ^2/n）は小さい．



中心極限定理：多くの観測値を正規分布で近似する裏付けとなっている

サンプルから母集団統計量を推定する

命題：
得られたサンプルから，その発生母体である母集団の統計量を推定したい．
例）全国の20歳男子の身長の平均と分散を40人のサンプルから推定したい．

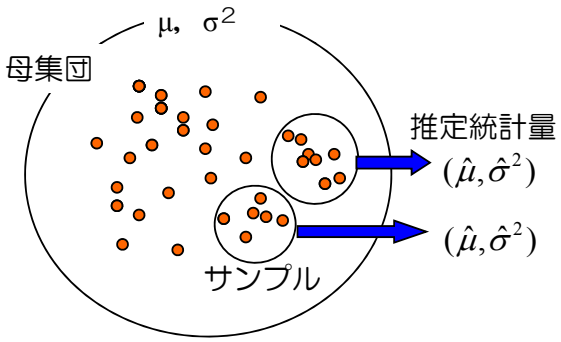


サンプルの自体の平均と分散		母集団の平均と分散
平均（１次の統計量）	どんな関係？	平均（１次の統計量）
$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$	⟷	$\mu = E\{x\} = \int x \cdot p(x)dx$　p(x)はxの生起確率
分散（２次の統計量）	どんな関係？	分散（２次の統計量）
$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$	⟷	$\sigma^2 = E\{(x-\mu)^2\} = \int (x-\mu)^2 \cdot p(x)dx$

通常p(x)は未知であり，得られたサンプルから統計量を推定するしかない．

不偏推定量　unbiased estimator
－平均の不偏推定量－

不偏推定量とは，サンプルから求めた母集団統計量の**期待値**が，真の母集団統計量に一致するものをいう．



$$E\{\hat{\mu}\}=\mu ?$$
$$E\{\hat{\sigma}^2\}=\sigma^2 ?$$

成り立てば不偏推定量と言える

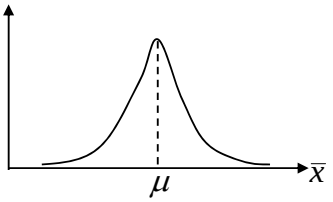
サンプル平均を母集団平均の推定値とした場合，

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

サンプル平均の期待値は

$$E\{\bar{x}\}=E\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int x_i p(x_i)dx$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\{x_i\}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu=\frac{n}{n}\mu=\mu$$

となり，母集団平均に一致する．よって，サンプル平均は，母集団平均に対する不偏推定量といえる．



分散の不偏推定量

サンプルの分散の期待値を計算してみる

$$s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

$$E\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\}=E\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[(x_i-\mu)-(\bar{x}-\mu)]^2\}$$
$$=\frac{1}{n}E\{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\}$$
$$-\frac{2}{n}E\{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)(\bar{x}-\mu)\}$$
$$+\frac{1}{n}E\{n(\bar{x}-\mu)^2\}$$

上式右辺の第１項は

$$\frac{1}{n}E\{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\{(x_i-\mu)^2\}$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2=\sigma^2$$

n-1で割れば母集団分散に一致することを確認しなさい．

第３項は

$$E\{(\bar{x}-\mu)^2\}=E\left\{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i-\mu\right)^2\right\}$$
$$=E\left\{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)\right)^2\right\}$$
$$=E\left\{\frac{1}{n^2}\sum_i\sum_j(x_i-\mu)(x_j-\mu)\right\}$$

無相関の仮定により，２つの異なるサンプルの積の和は０になる

$$=E\left\{\frac{1}{n^2}\sum_i(x_i-\mu)^2\right\}$$
$$=\frac{1}{n^2}\sum_i E\{(x_i-\mu)^2\}$$
$$=\frac{1}{n^2}n\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}$$

第２項も同様に計算できる．結局，

$$E\{s^2\}=\sigma^2-\frac{2}{n}\sigma^2+\frac{1}{n}\sigma^2=\frac{n-1}{n}\sigma^2\neq\sigma^2$$

となり，母集団分散には一致しないことがわかる

分散の不偏推定量（つづき） 直感的解釈

なぜ分散の推定を，（ｎで割らずに）

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

で与えるか？　⇒直感的解釈

仮に母集団の平均μが既知であれば，
ｎ個のデータからの分散の推定は

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$

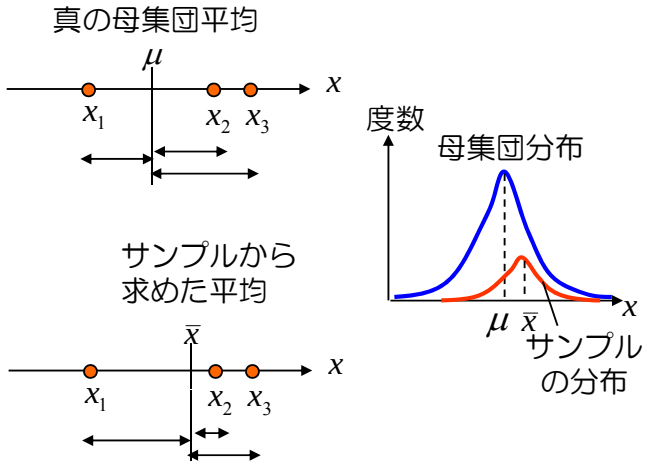
で与えればよい．これに対し，母集団平均μが未知のために，かわりにサンプル平均を用いた場合の分散をｓ^{2}とすると，

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

この場合，かならず

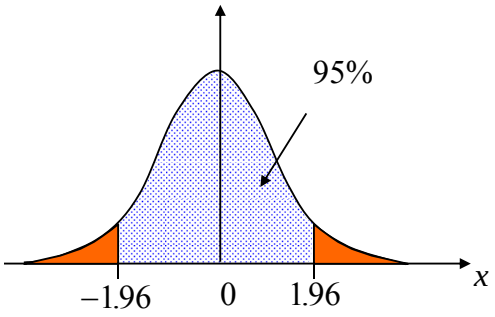
$$s^2 \le \bar{\sigma}^2$$

が成り立つ．すなわち，ｓ^{2}は真の母集団分散を過小に推定する傾向がある．
そこで，ｎで割らずにｎ－１で割ることでこの過小推定を防ぐ．



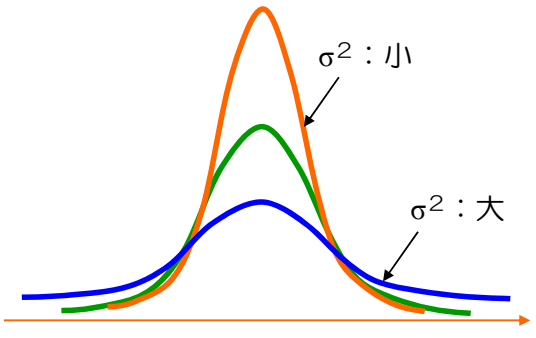
正規分布（ガウス分布） $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$

標準正規分布 $N(0,1)$

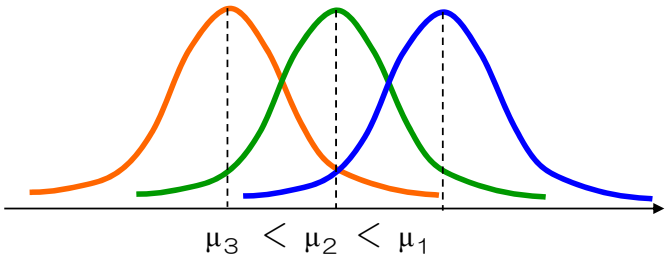


９５%の確率で存在する範囲が
統計ではしばしば使われる．
標準正規分布では－１．９６から
１．９６の範囲となる．

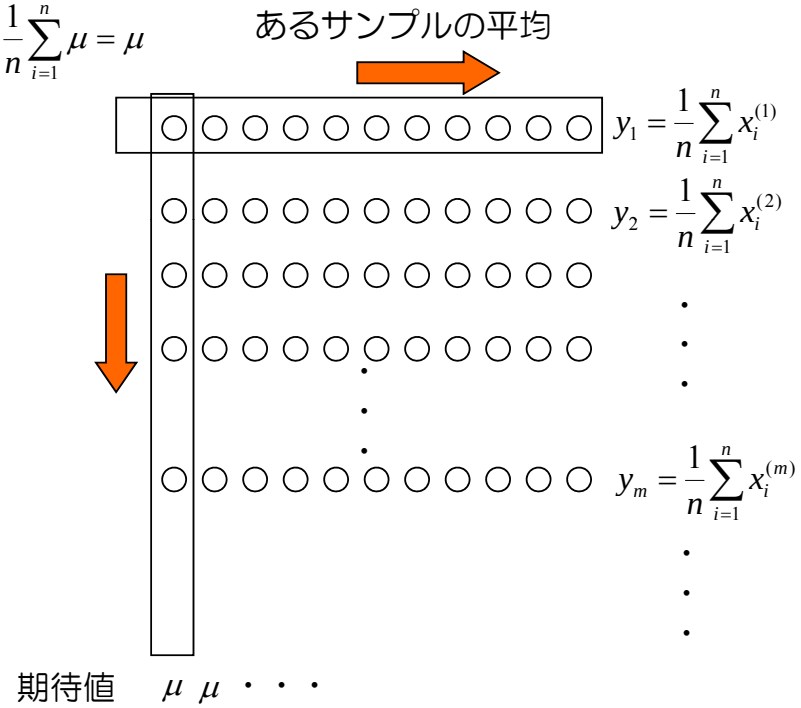
平均が同じで分散が異なる正規分布



分散が同じで平均が異なる正規分布



$$E\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\{x_i\}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu=\mu$$



第2項の導出

$$E\{(x_i-\mu)(\bar{x}-\mu)\}=E\{(x_i-\mu)(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j-\mu)\}=E\{(x_i-\mu)(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j-\mu)\}$$

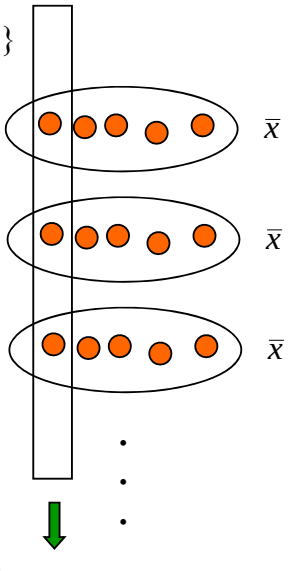
$$=E\{(x_i-\mu)(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j-\mu)\}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}E\{(x_i-\mu)(x_j-\mu)\}$$

$$=\frac{1}{n}E\{(x_i-\mu)^2\}+\frac{1}{n}\sum_{j=1,\,j\neq i}^{n}E\{(x_i-\mu)(x_j-\mu)\}$$

$$=\frac{1}{n}E\{(x_i-\mu)^2\}=\frac{1}{n}\sigma^2$$

ゆえに

$$-\frac{2}{n}E\{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)(\bar{x}-\mu)\}=-\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\sigma^2=-\frac{2}{n}\sigma^2$$



参考：第3項 $\frac{1}{n}E\{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\{(x_i-\mu)^2\}$

σ^2

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2=\sigma^2$$

二項分布 binomial distribution

例）３回サイコロを投げて，ｘ回，１の目が出る確率を考える．

	０回	１回	２回	３回
$P(x)$	$\left(\frac{5}{6}\right)^3$	$3\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^2$	$3\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)$	$\left(\frac{1}{6}\right)^3$
	≠1 ≠1 ≠1	1 ≠1 ≠1	1 1 ≠1	1 1 1

$\Rightarrow p(x)={}_3C_x\left(\frac{1}{6}\right)^x\left(\frac{5}{6}\right)^{3-x}$

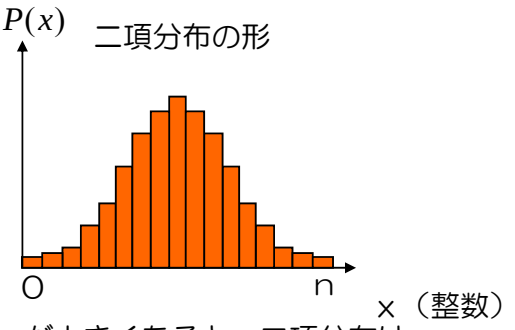
一般に，確率ｐをもつ事象が，
ｎ回の観察でｘ回起こる確率P(x)は

$$P(x)={}_nC_x p^x(1-p)^{n-x}=\frac{n!}{x!(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x}$$

この式で表される確率分布を二項分布と呼ぶ．

平均：$\mu=np$

分散：$\sigma^2=np(1-p)$



ｎが大きくなると，二項分布は
正規分布に近づく

ポアソン分布 Poisson distribution

二項分布において，実験回数ｎが十分大きい場合，
二項分布はポアソン分布で近似できる．

$$P(x)={}_nC_x p^x(1-p)^{n-x}$$

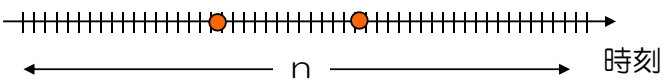
⇩ 近似

$$P(x)=\frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}\qquad \text{ただし}\quad \mu=np$$

平均μが大きければ，ポアソン分布は
正規分布に近似できる．

例）千葉市の１日あたりの交通事故件数の分布

１日を十分細かくきざんで考える（例えば１分単位）．
すると，このきざみのなかでは，事故が起こるか起こらないかの，どちらかの事象のみ起こるとみなせる．
１つのきざみ内で事故が起こる確率をｐとすれば，
１日にｘ件事故が起こる確率は，二項分布で表せる．



１日平均５回，事故が起こるとする．

１）二項分布で考えると，

１分あたりに事故が起こる確率は

$p=5/(24\times60)$

ある１日に，ｘ回起こる確率は，

$P(x)={}_{24\times60}C_x p^x(1-p)^{24\times60-x}$

２）ポアソン分布で考えると

$$P(x)=\frac{5^x e^{-5}}{x!}$$

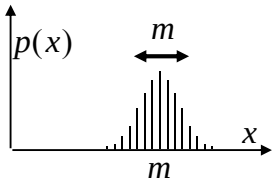
事故数	二項分布	ポアソン分布	
0	0.00668	0.00674	
1	0.03351	0.03369	
2	0.08402	0.08422	
3	0.14032	0.14037	
4	0.17565	0.17547	
5	0.17577	0.17547	← 5回
6	0.14648	0.14622	
7	0.10455	0.10444	
8	0.06526	0.06528	
9	0.03618	0.03627	
10	0.01804	0.01813	

ポアソン分布の性質とフォトンノイズの例

ポアソン分布は，平均と分散が等しい．

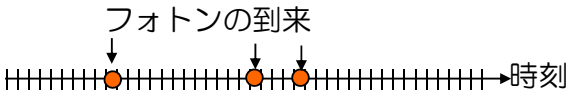
$$P(x)=\frac{m^x e^{-m}}{x!}$$

において 平均＝分散＝m

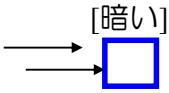
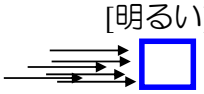


標準偏差は $\sigma=\sqrt{m}$

例）明るい条件と暗い条件で，単位時間あたりにCCDの画素に到達するフォトン数を考える．



CCDの画素に到達するフォトン数はポアソン分布に従う．

[暗い]	[明るい]
	
CCD画素	CCD画素
平均をm=100とする	平均をm=10000とする
標準偏差は	
$\sigma=\sqrt{100}=10$	$\sigma=\sqrt{10000}=100$
フォトン数xのちらばりを±2σの範囲で考えると	
$80<x<120$	$9800<x<10200$
カメラのゲインコントロールによって明るさを合わせられることを考えて，それぞれの平均が１００になるように正規化すると	
$80<x<120$	$98<x<102$

以上より，暗い状態ではノイズが増えることがわかる（フォトンノイズという）