判別分析２

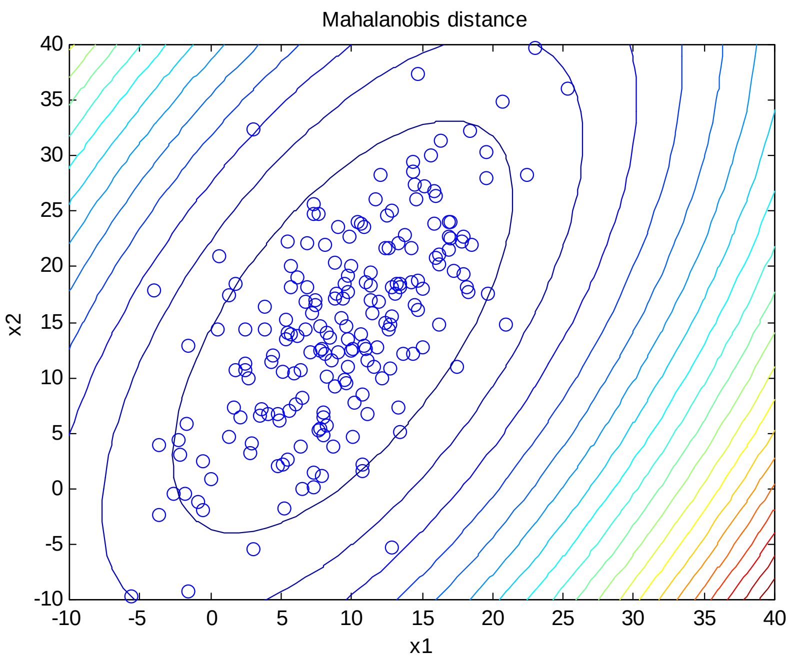
講義内容

１．数値例

２．ベイズ則(Bayes Decision Rule)を用いた判別分析

マハラノビス距離の計算例

ーサンプル分布と等距離線ー



平均ベクトル：

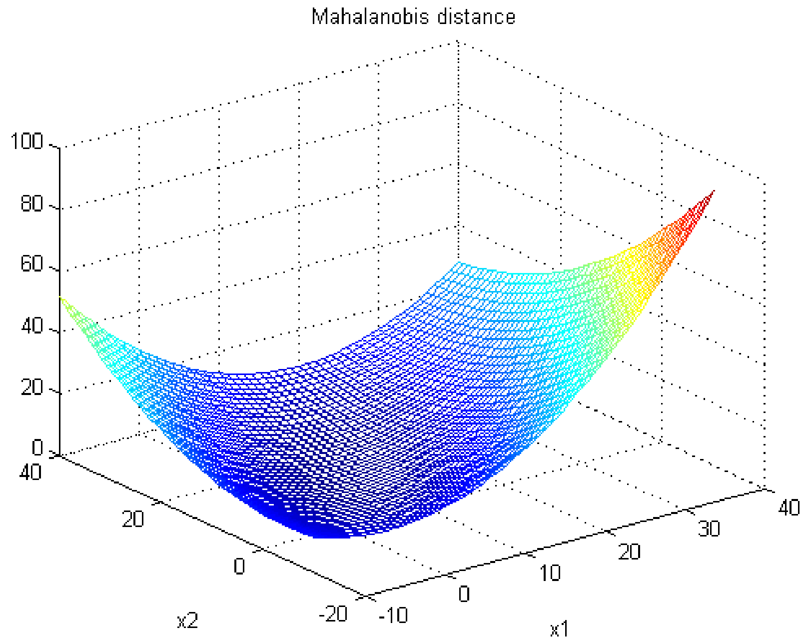
$$\begin{pmatrix} 9.3659 \\ 14.5690 \end{pmatrix}$$

共分散行列：

$$\begin{pmatrix} 34.1644 & 33.5256 \\ 33.5256 & 81.1758 \end{pmatrix}$$

計算例 ーマハラノビス距離ー

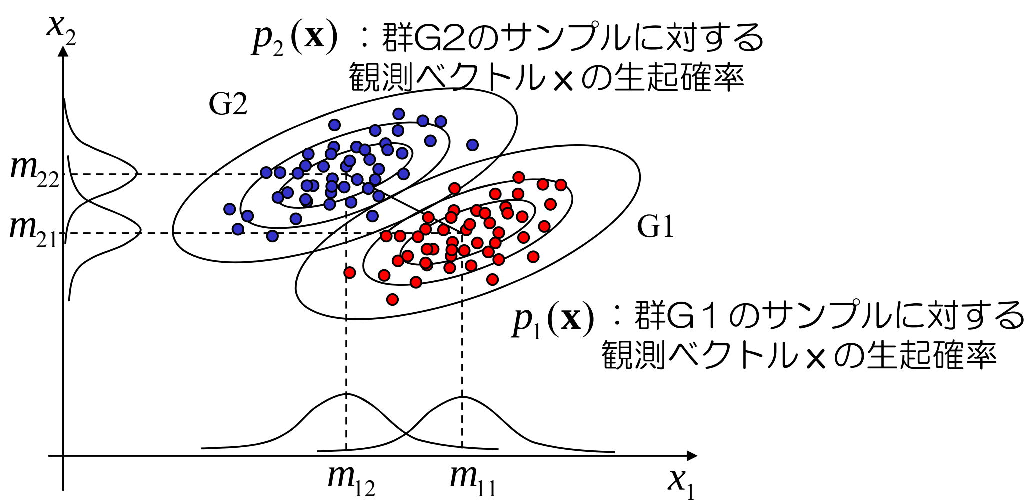
鳥瞰図による表示



実際の手順

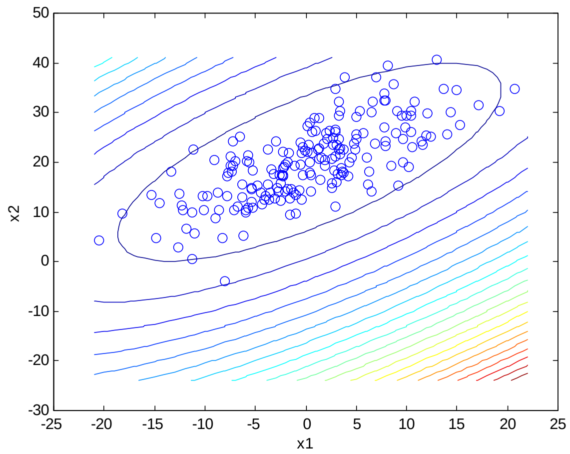
１．グループ分けが既知のサンプルを集め，各グループで
母集団の共分散行列と平均を推定する．（準備段階）

２．入力されたテストサンプルについて，各グループからの
マハラノビス距離を計算し，近い方に分類する．

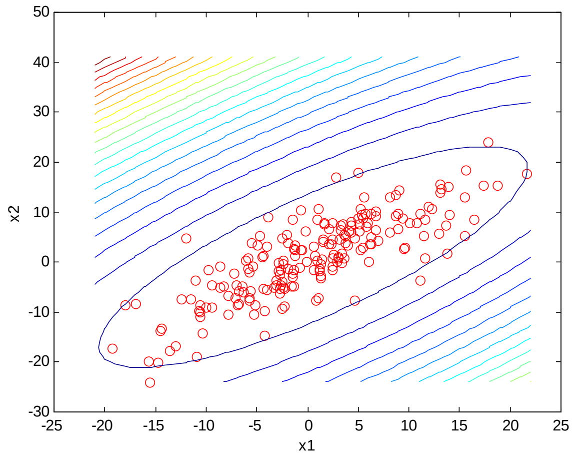


判別分析例１

共分散行列が等しい場合

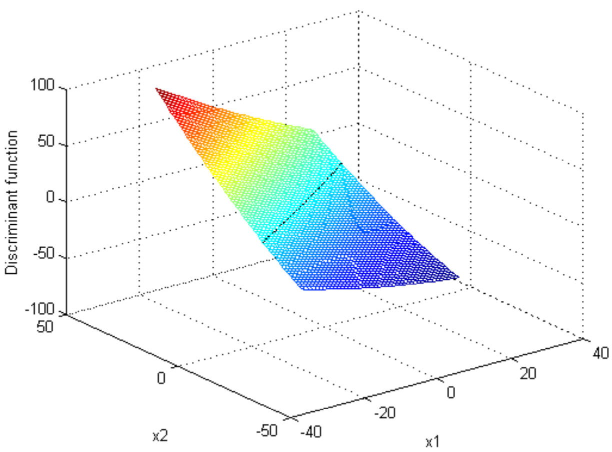


グループ１のサンプル（２００個）と
マハラノビス等距離曲線

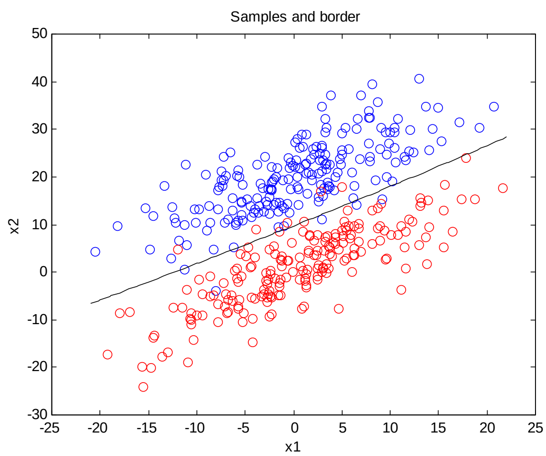


グループ２のサンプル（２００個）と
マハラノビス等距離曲線

判別分析例１（つづき）



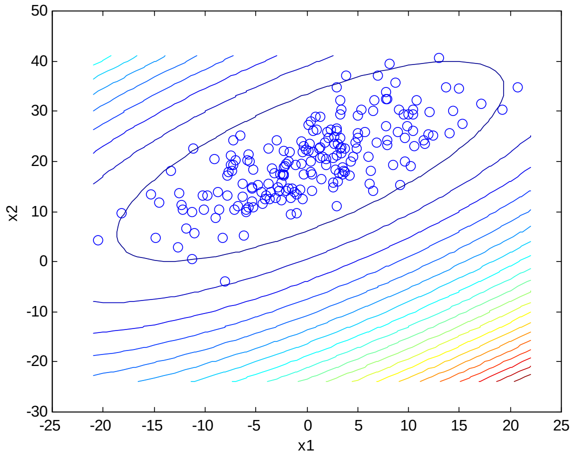
判別関数



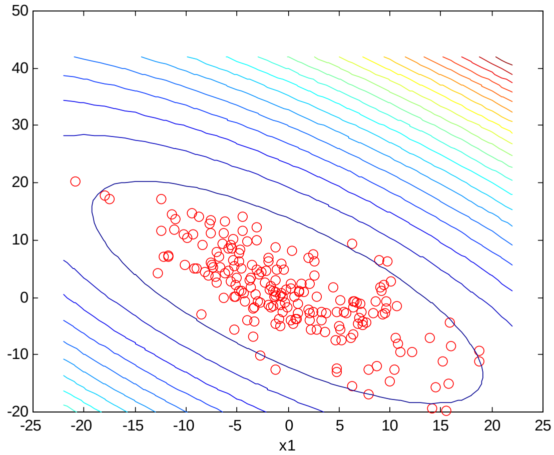
２グループのサンプルと
判別の境界

判別分析例２

共分散行列が異なる場合

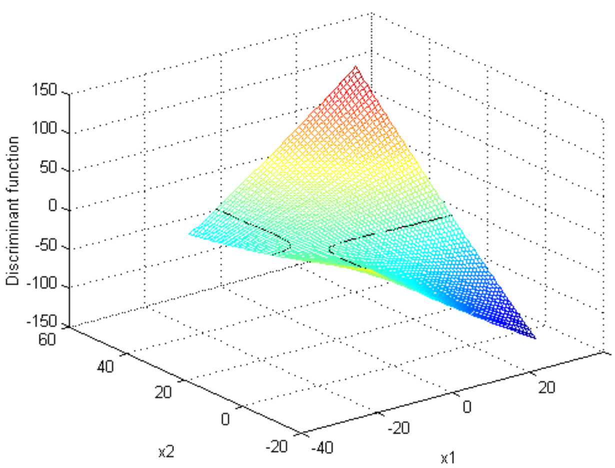


グループ１のサンプル（２００個）と
マハラノビス等距離曲線

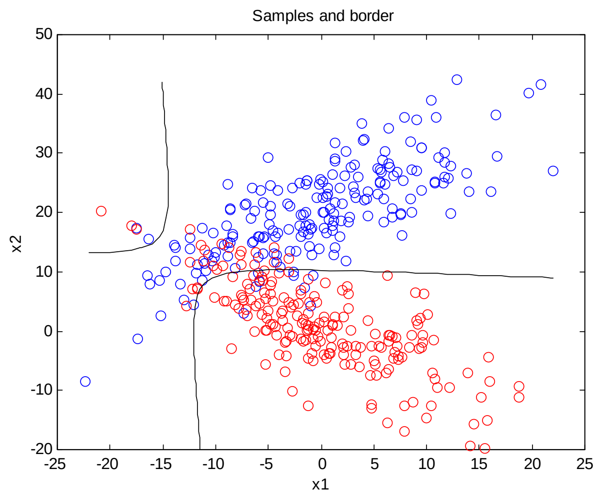


グループ２のサンプル（２００個）と
マハラノビス等距離曲線

判別分析例２（つづき）



判別関数

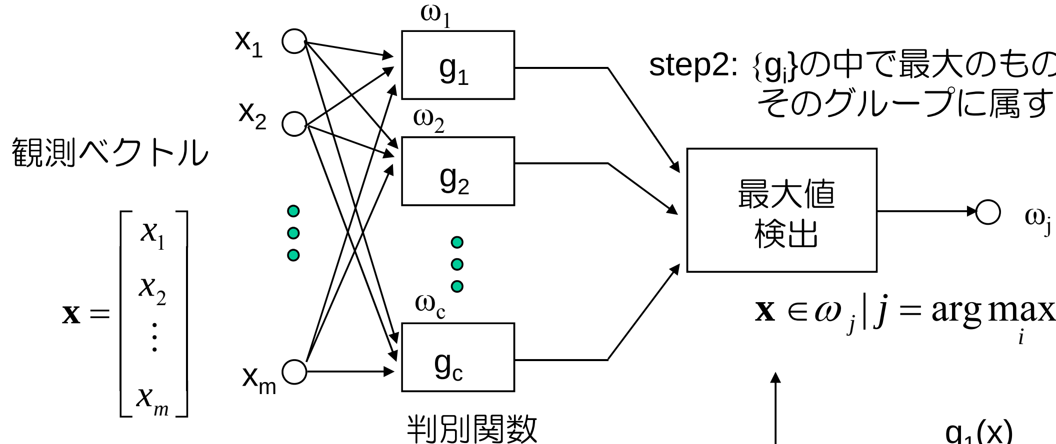


２グループのサンプルと
判別の境界

ベイズ則を用いた判別分析

step1:入力された観測ベクトルに対して
各判別関数{g_i}を計算する.

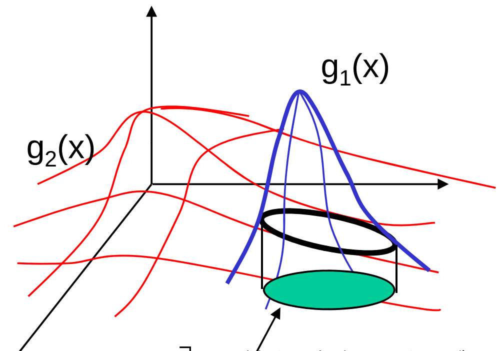
step2: {g_i}の中で最大のものを探し
そのグループに属すると判断する.



$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

（m:多変量ベクトル
の次元数）

$$\mathbf{x} \in \omega_j \,|\, j = \arg\max_i \{g_i(\mathbf{x})\}$$



ω_1に分類される領域

ベイズの決定則

グループω_1からサンプルが発生して，かつ，
そのときの観測ベクトルが x である確率は

$$p(\omega_1, \mathbf{x}) = p(\omega_1)\,p(\mathbf{x}|\omega_1) = p(\mathbf{x})\,p(\omega_1|\mathbf{x}) \quad \cdots(1)$$

と書ける．（１）式より，事後確率は

$$p(\omega_1|\mathbf{x}) = \frac{p(\omega_1)\,p(\mathbf{x}|\omega_1)}{p(\mathbf{x})}$$

グループG2についても同様に

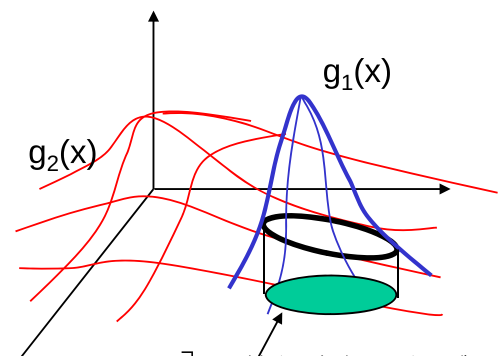
$$p(\omega_2|\mathbf{x}) = \frac{p(\omega_2)\,p(\mathbf{x}|\omega_2)}{p(\mathbf{x})}$$

２つの事後確率の大小で
グループ分けを決定する
のに使う.

両者の分母は共通なので，分子で比較する.

$$g_1(\mathbf{x}) \equiv p(\omega_1)\,p(\mathbf{x}|\omega_1)$$

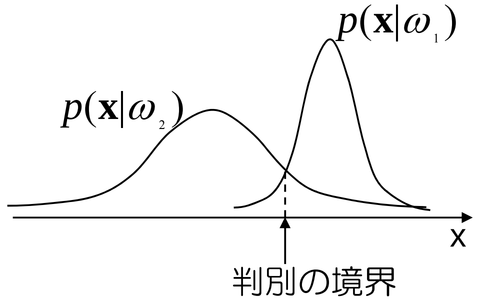
$$g_2(\mathbf{x}) \equiv p(\omega_2)\,p(\mathbf{x}|\omega_2)$$



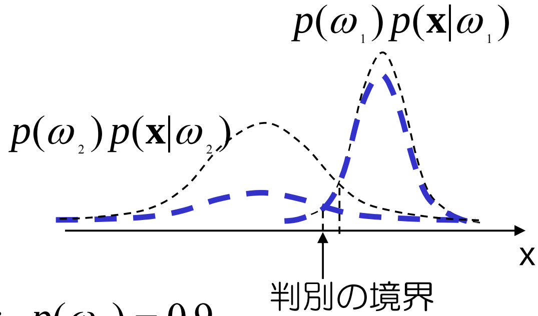
ω_1に分類される領域

ベイズ則（つづき）

条件付き確率のみによる判別：



事後確率による判別：



例： $p(\omega_1)=0.9$

$p(\omega_2)=0.1$

$$\begin{cases} g_1(\mathbf{x}) \equiv p(\omega_1)p(\mathbf{x}|\omega_1) \\ g_2(\mathbf{x}) \equiv p(\omega_2)p(\mathbf{x}|\omega_2) \end{cases}$$

以下の式の大小で判別する

$$f(\mathbf{x}) = g_1(\mathbf{x}) - g_2(\mathbf{x})$$

$f(\mathbf{x}) > 0$ *then the sample belongs to* ω_1

$f(\mathbf{x}) < 0$ *then the sample belongs to* ω_2

ベイズ則とマハラノビスによる決定則との関係

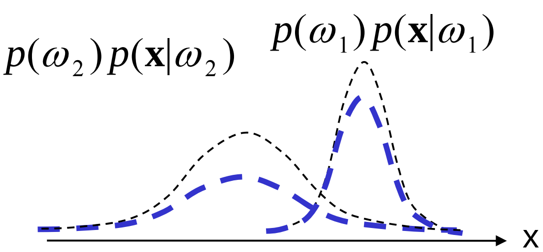
各グループの生起確率が正規分布に従うものとする.

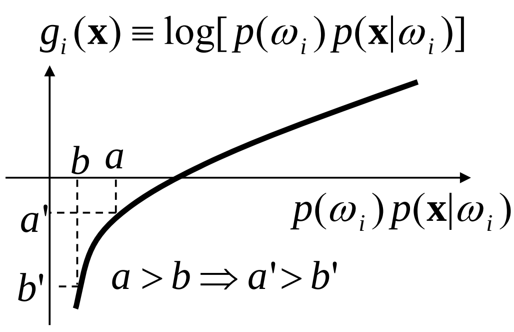
高次元正規分布の一般式：

$$p(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} |\mathbf{C}|^{-\frac{1}{2}} \exp[-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{m})^T \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m})]$$

事後確率の比較に際し，対数関数の単調増加性を利用して，
対数事後確率による比較を行う.

$$g_1(\mathbf{x}) \equiv \log[p(\omega_1)p(\mathbf{x}|\omega_1)] = \log p(\omega_1) + \log p(\mathbf{x}|\omega_1)$$
$$g_2(\mathbf{x}) \equiv \log[p(\omega_2)p(\mathbf{x}|\omega_2)] = \log p(\omega_2) + \log p(\mathbf{x}|\omega_2)$$





対数事後確率の大小で判別する

i番目の判別関数：

$$g_i(\mathbf{x}) \equiv \log[p(\omega_i)p(\mathbf{x}|\omega_i)] = \log p(\omega_i) + \log p(\mathbf{x}|\omega_i)$$

ここで，正規分布の場合の条件付き確率は

$$p(\mathbf{x}\,|\,\omega_i) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}}|\mathbf{C}_i|^{-\frac{1}{2}}\exp[-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{m}_i)^T\mathbf{C}_i^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m}_i)]$$

判別関数を書き下すと

$$\begin{aligned} g_i(\mathbf{x}) &= \log p(\omega_i) + \log p(\mathbf{x}|\omega_i) \\ &= \log p(\omega_i) \\ &\quad -\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{m}_i)^T\mathbf{C}_i^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m}_i) - \frac{d}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2}\log|\mathbf{C}_i| \end{aligned}$$

共分散行列が共通の場合

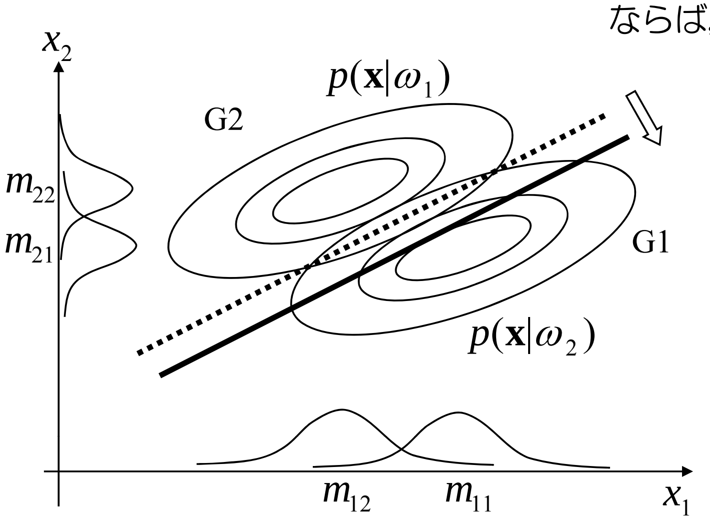
グループ数が２で，共分散行列が同一の場合を考える

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &\equiv g_1(\mathbf{x}) - g_2(\mathbf{x}) \\ &= \log p(\omega_1) - \frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{m}_1)^T\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m}_1) - \frac{d}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2}\log|\mathbf{C}| \\ &\quad -\log p(\omega_2) + \frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{m}_2)^T\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m}_2) + \frac{d}{2}\log 2\pi + \frac{1}{2}\log|\mathbf{C}| \\ &= \log\frac{p(\omega_1)}{p(\omega_2)} + \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{m}_2)^T\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m}_2) - \frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{m}_1)^T\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m}_1)}_{\text{マハラノビス距離の差}} \end{aligned}$$

$p(\omega_1) = p(\omega_2)$　ならば，マハラノビス距離で判別する場合に等しい

$p(\omega_1) \neq p(\omega_2)$　ならば，f(x)=0の境界が動く

共分散行列が共通の場合（つづき）



$p(\omega_1) > p(\omega_2)$

ならば，図のようにf(x)=0の境界が動く