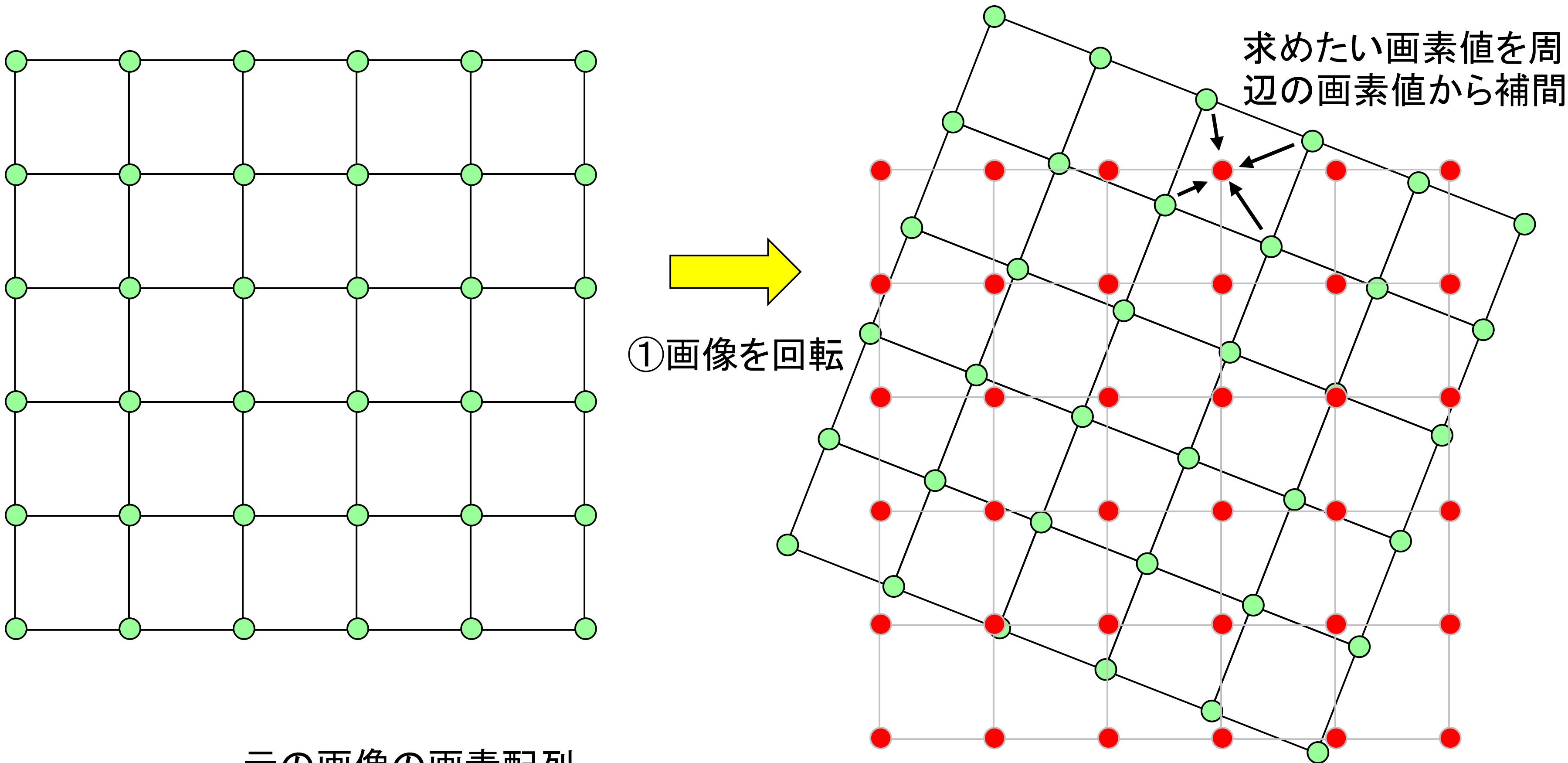
画像の補間：interpolation

例えば，デジタル画像を回転させたいとき．．．

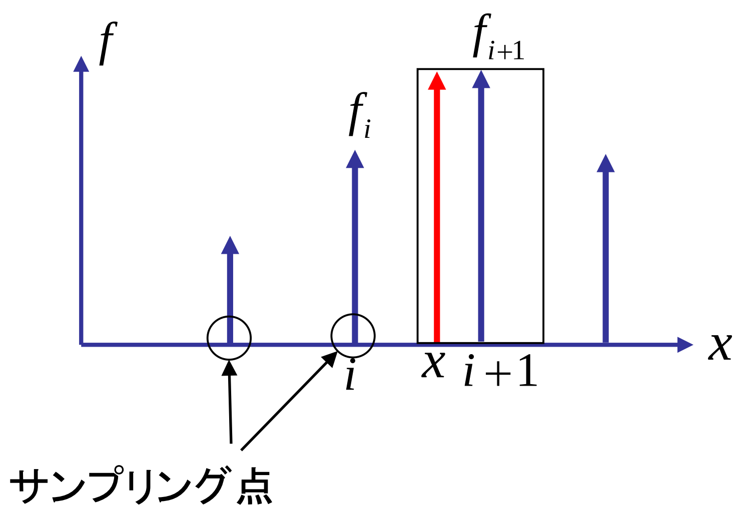


元の画像の画素配列

②縦横方向に格子状に再サンプリング

1次元信号の再サンプリングと補間

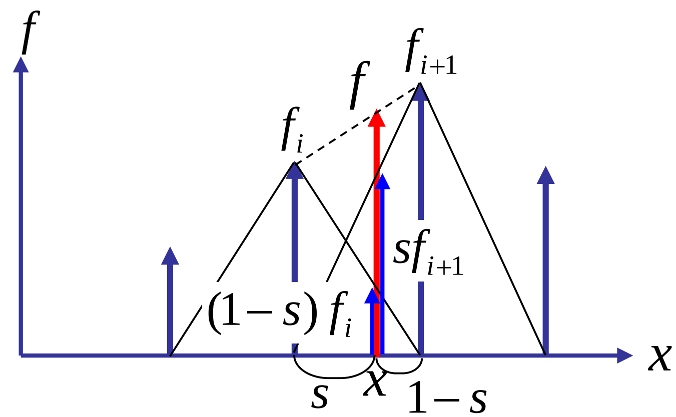
0次補間（最近傍補間）



$$f(x) = f_i \qquad i = \arg\min |x - i|$$

どの値も、もっとも近い位置にある画素値の値をそのまま用いる。

1次関数による補間



$$f(x) = sf_{i+1} + (1-s)f_i$$

2つの解釈

① f_iとf_{i+1}の点を直線で結び、xの位置での値 を計算する。

$$f(x) = f + s(f_{i+1} - f_i) = sf_{i+1} + (1-s)f_i$$

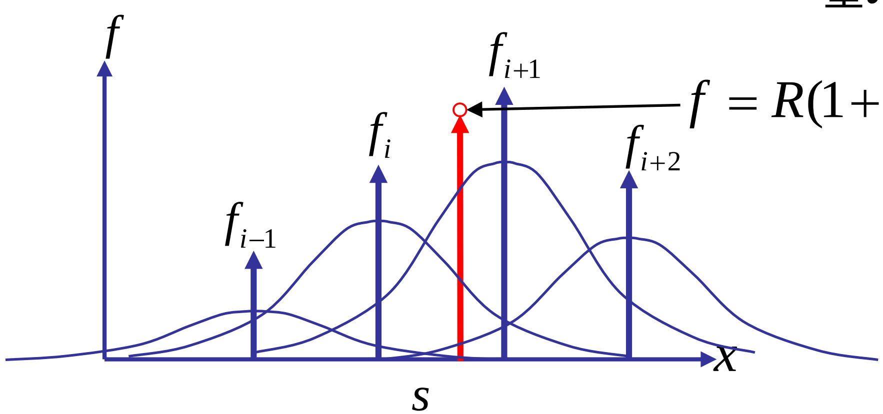
② f_iからの寄与$(1-s)f_i$と、f_{i+1}からの寄与sf_iの和で与えられる。

$$f(x) = sf_{i+1} + (1-s)f_i$$

1次元信号の再サンプリングと補間

スプライン関数による補間

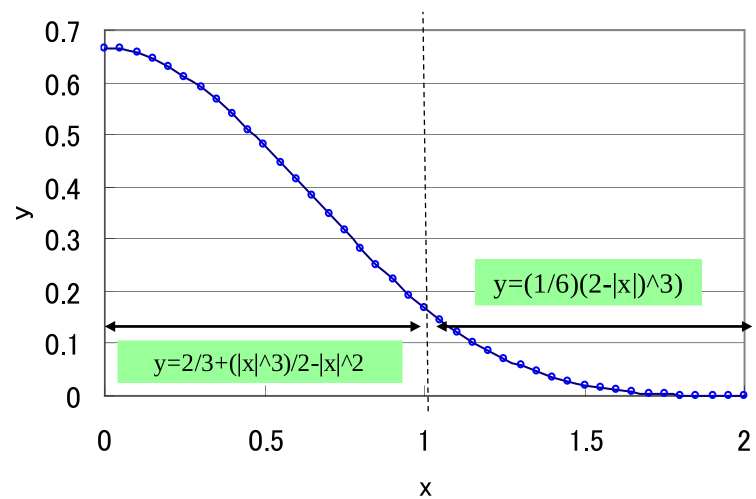
4つの近傍信号に対してスプライン関数で
重み付けられた和で与えられる



$$f = R(1+s)\,f_{i-1} + R(s)\,f_i + R(s-1)\,f_{i+1} + R(s-2)\,f_{i+2}$$

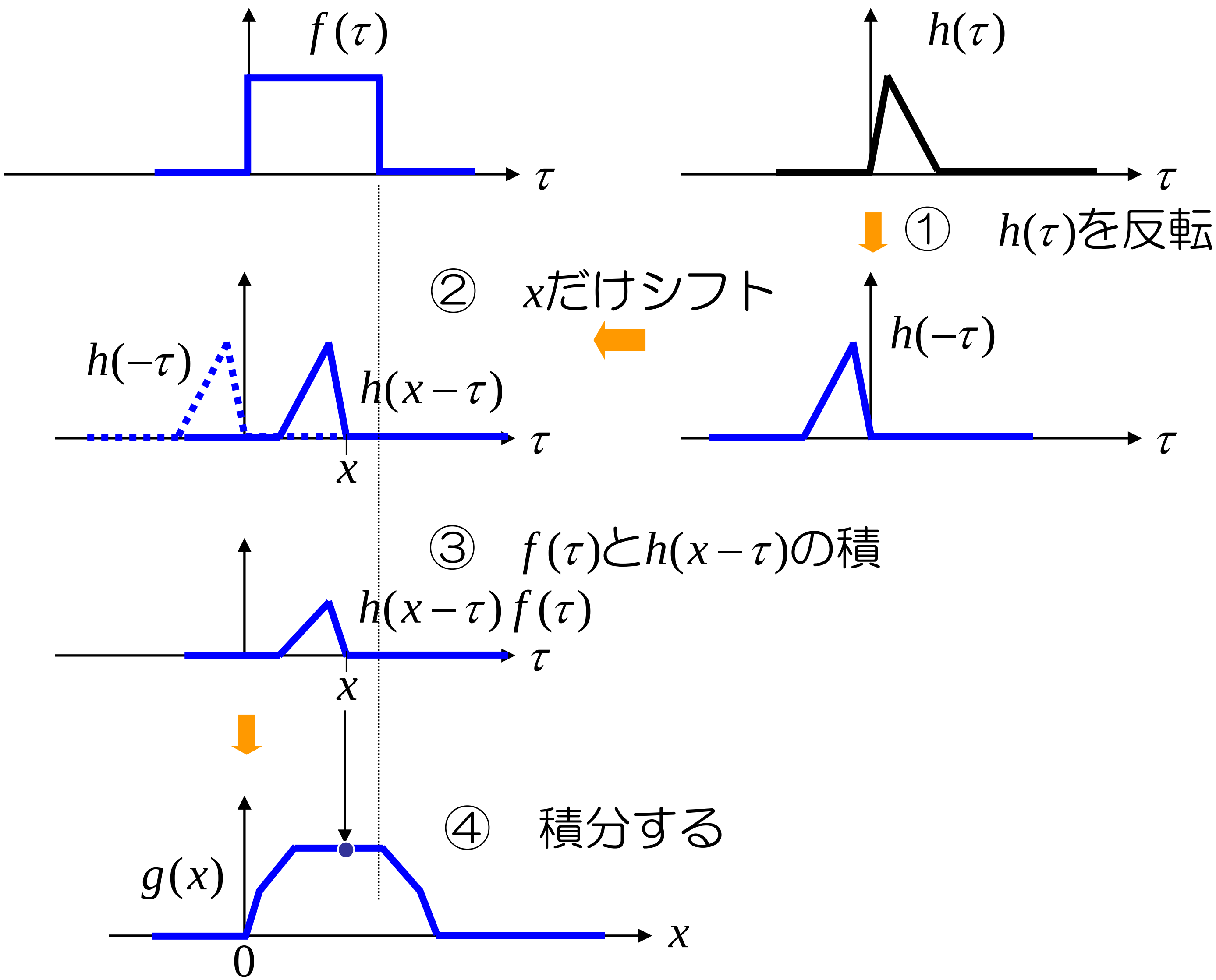
スプライン関数

$$R(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{2}|x|^3 - |x|^2, & 0 \le |x| \le 1 \\ \dfrac{1}{6}(2-|x|)^3, & 1 \le |x| \le 2 \end{cases}$$

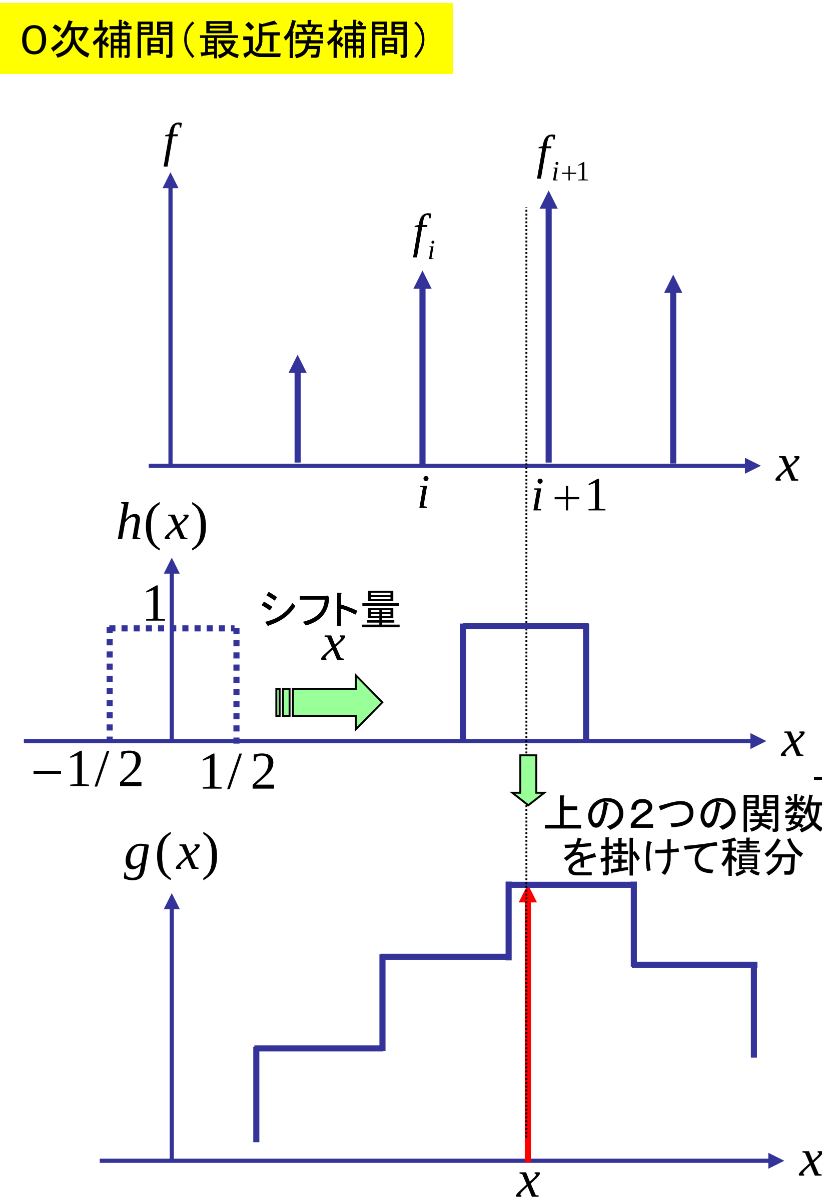


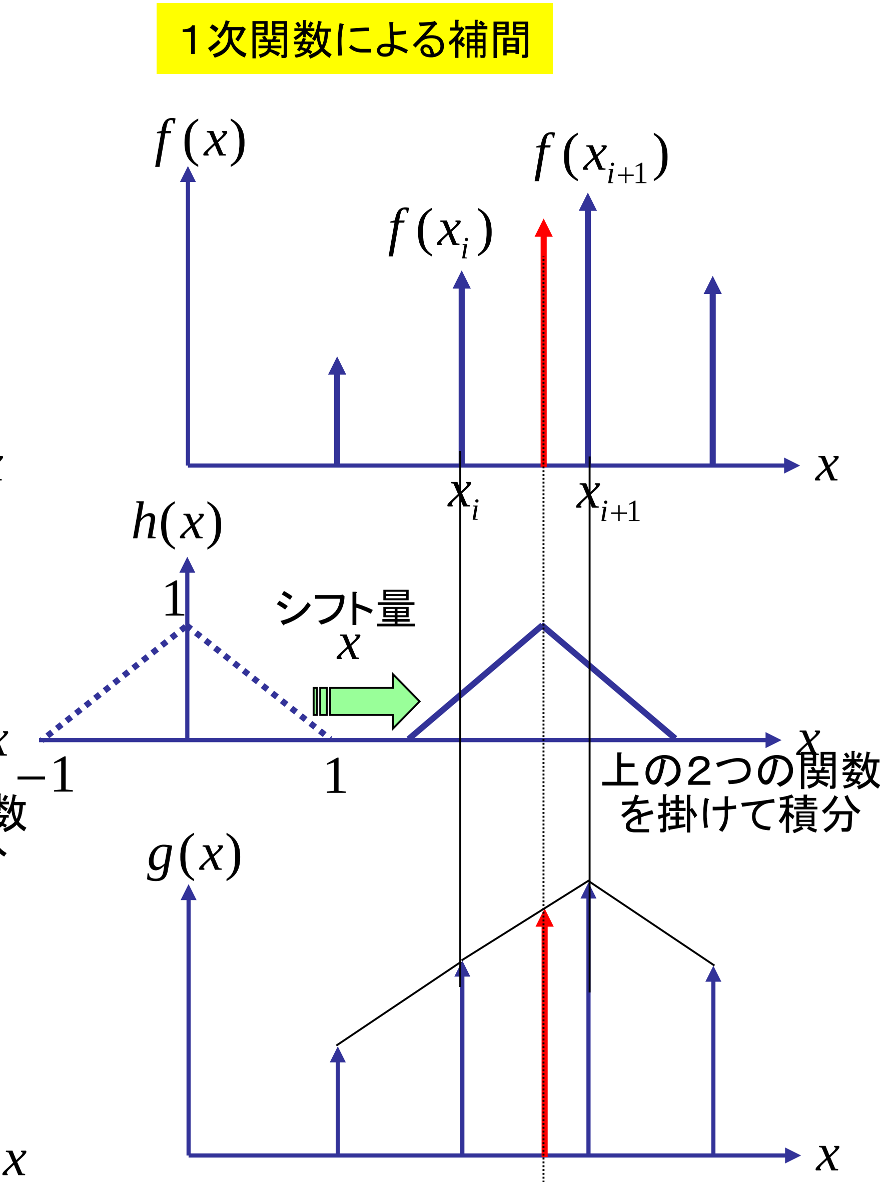
コンボリューション演算

$$g(x) \equiv h(x) * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x-\tau) f(\tau) d\tau$$



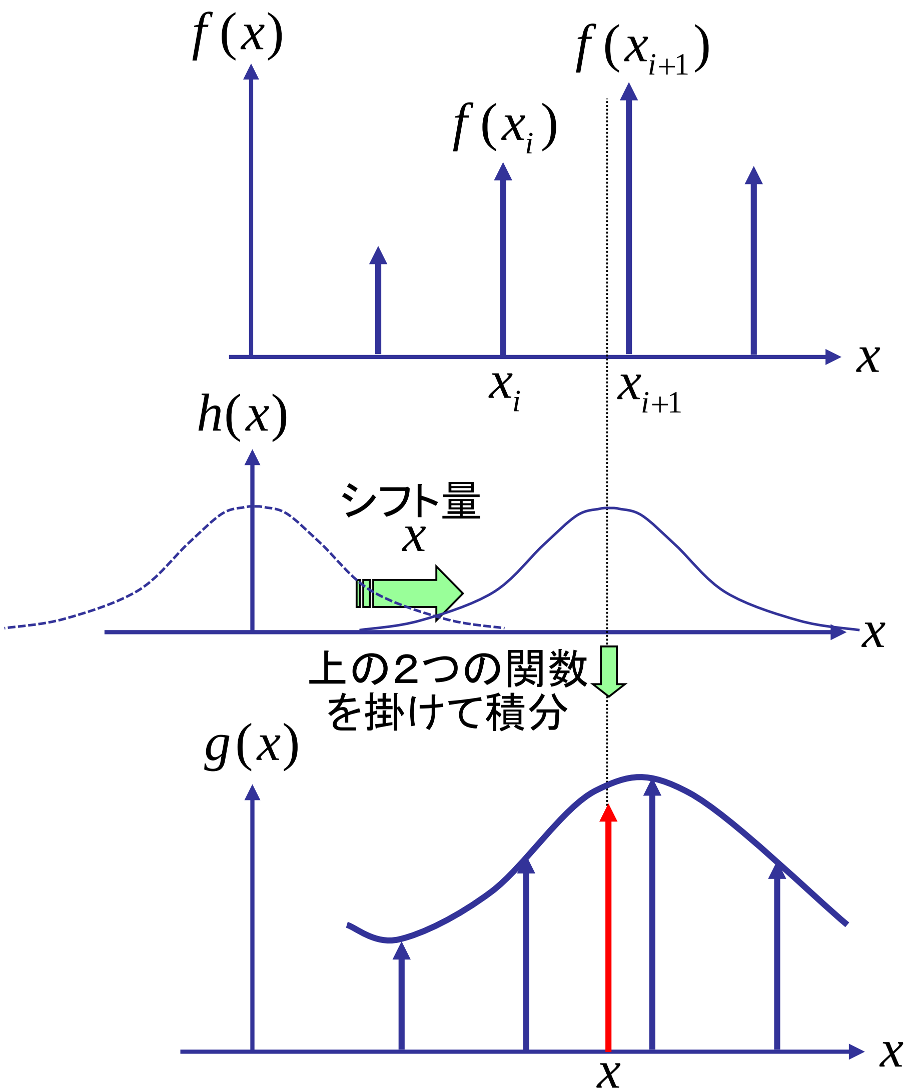
コンボリューション演算としての解釈





コンボリューション演算としての解釈（つづき）

３次補間

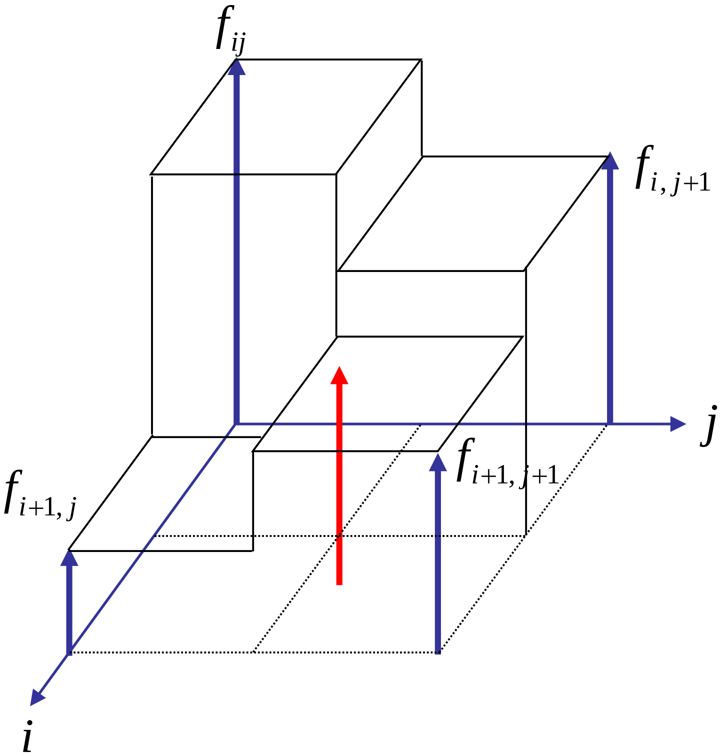


３次多項式（Cubic B-spline）

$$
R(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} + \frac{1}{2}|x|^3 - |x|^2, & 0 \le |x| \le 1 \\ \frac{1}{6}(2-|x|)^3, & 1 \le |x| \le 2 \end{cases}
$$

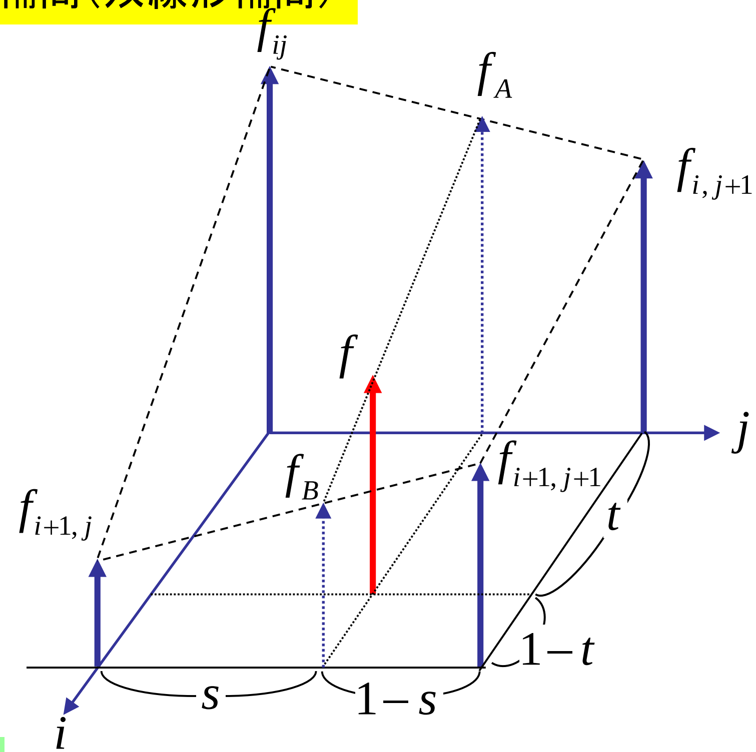
２次元画像の補間

０次補間（最近傍補間）



$$f = f_{i+1,j+1}$$

bilinear補間（双線形補間）



STEP1

$$f_A = (1-s)\,f_{i,j} + sf_{i,j+1}$$
$$f_B = (1-s)\,f_{i+1,j} + sf_{i+1,j+1}$$

STEP2

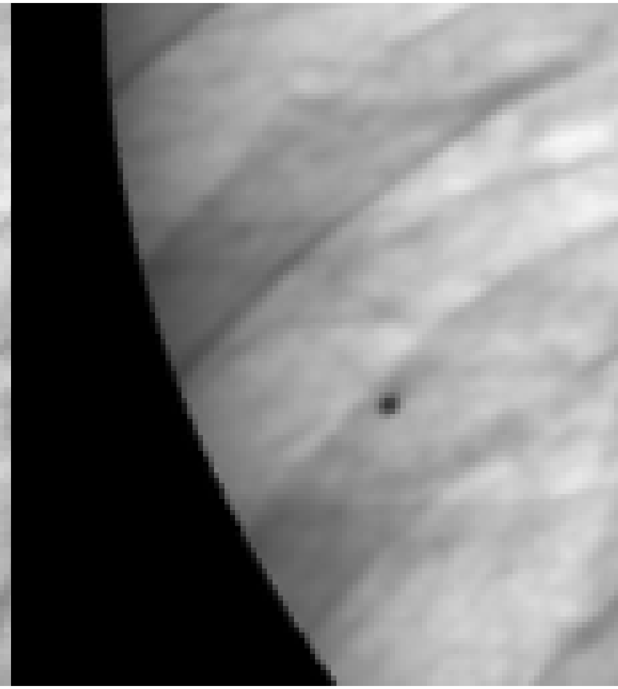
$$\begin{aligned} f &= (1-t)\,f_A + tf_B \\ &= (1-t)[(1-s)\,f_{ij} + sf_{i,j+1}] + t[(1-s)\,f_{i+1,j} + sf_{i+1,j+1}] \\ &= (1-t)(1-s)\,f_{ij} + s(1-t)\,f_{i,j+1} + t(1-s)\,f_{i+1,j} + stf_{i+1,j+1} \end{aligned}$$

参考

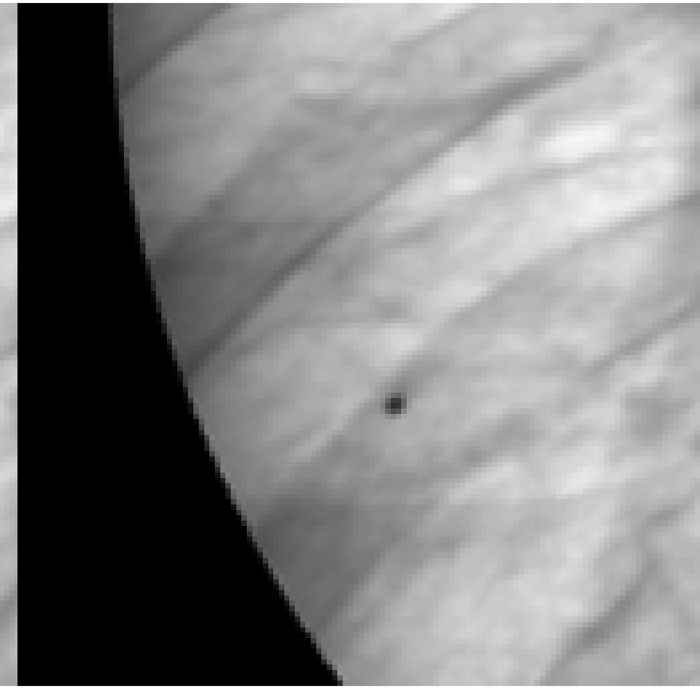
３次元の場合も，同様にして線形補間が可能．trilinearと呼ばれる．

画像の補間の例

0次補間



1次補間



キュービック補間

一部を拡大した様子