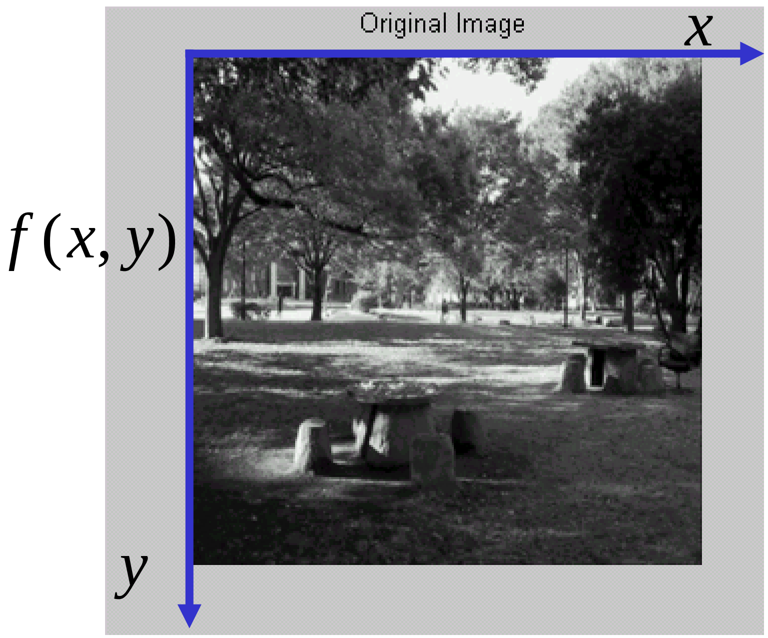
２次元フーリエ変換

講義内容

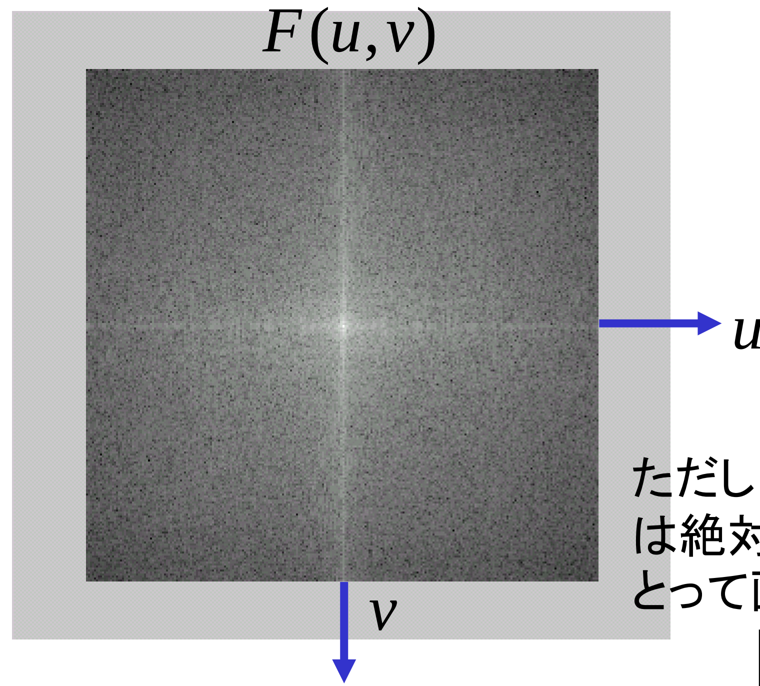
- 空間周波数の概念
- ２次元フーリエ変換
- 代表的な２次元フーリエ変換対
- ２次元離散フーリエ変換

フーリエ変換と逆変換



F.T.

I. F.T.



ただし，ここでは絶対値をとって画像化 $|F(u,v)|$

連続系

$$F(u,v)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\exp\{-j2\pi(ux+vy)\}dxdy$$

x, y, u, v は整数

離散系

順変換

$$F(u,v)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\exp\{-j2\pi(ux+vy)/N\}$$

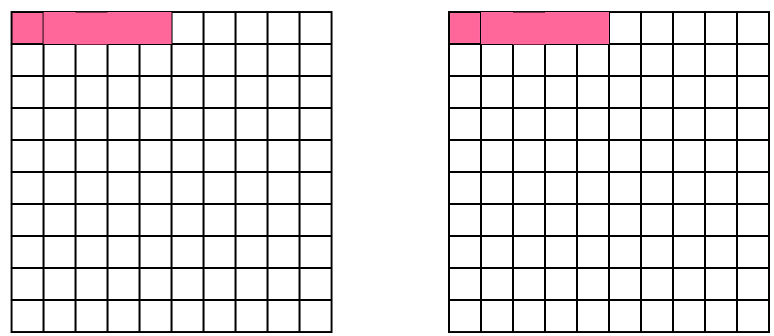
逆変換

$$f(x,y)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} F(u,v)\exp\{j2\pi(ux+vy)/N\}$$

２次元フーリエ変換の具体的なイメージ

離散系での説明

$$F(u,v)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\exp\{-j2\pi(ux+vy)/N\}$$



$f(x,y)$　　　$\exp\{-j2\pi(ux+vy)/N\}$

対応する画素ごとに積をとって
最後に総和をとる.

それでは$\exp\{-j2\pi(ux+vy)/N\}$はどんなパターンか？

２次元フーリエ変換の具体的なイメージ

連続系の表現

$$\exp\{-j2\pi(ux+vy)\} = \cos 2\pi(ux+vy) - j\sin 2\pi(ux+vy)$$

のうち，実部$\cos 2\pi(ux+vy)$に注目して考える.

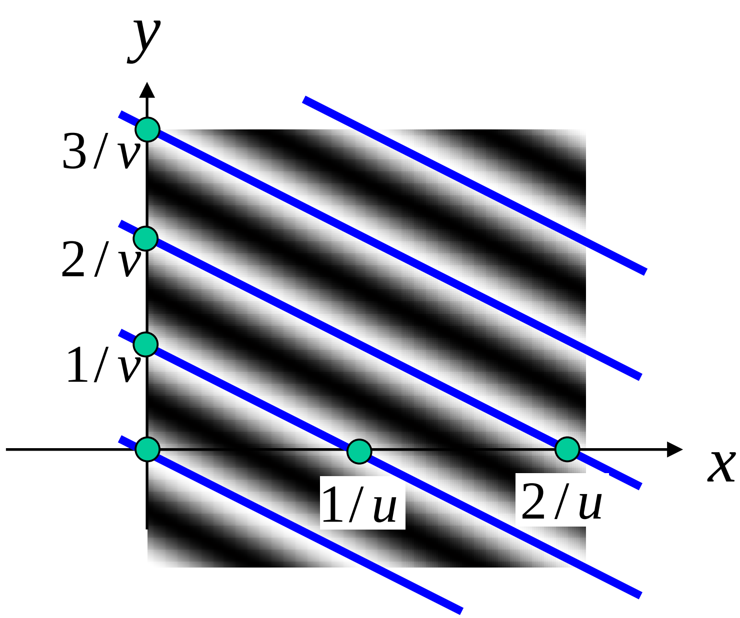
$ux+vy=0,1,2,\ldots,n,\ldots$

の直線は以下のようになる.

この直線は$\cos 2\pi n = 1$を与える.

(u,v)は空間的な波の周波数を与える.

⇒『空間周波数』と呼ばれる.



u : x方向の周波数成分

v : y方向の周波数成分

$ux+vy=0,1,2,\ldots,n,\ldots$

において，$y=0$とおくと

（すなわちx軸上に注目すると），

$ux=0,1,2\ldots \Leftrightarrow x=0,1/u,2/u,\ldots$

で$\cos(ux)=1$となる.

「uが小さい」⇔「間隔が大きい」

２次元フーリエ変換の具体的なイメージ

離散系の表現

$$\exp\{-j2\pi(ux+vy)/N\} = \cos[2\pi(ux+vy)/N] - j\sin[2\pi(ux+vy)/N]$$

のうち，実部 $\cos[2\pi(ux+vy)/N]$ に注目して考える．

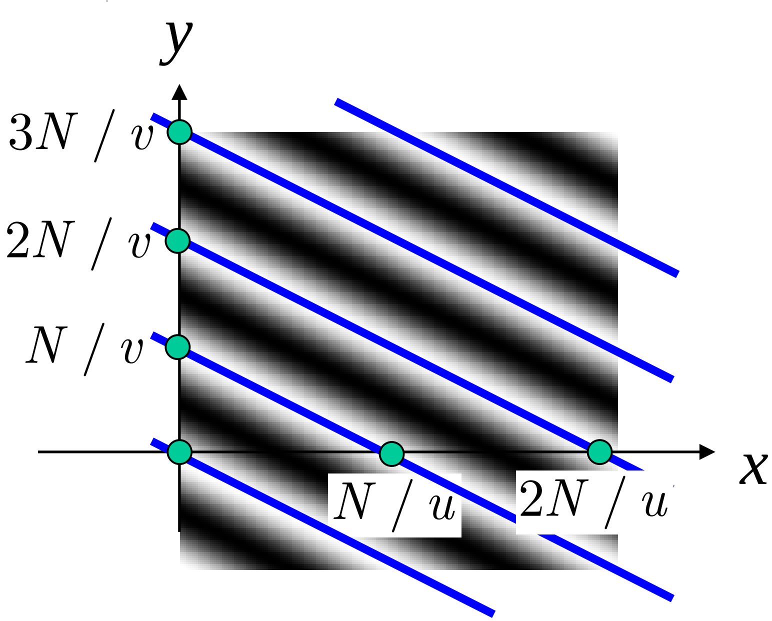
$(ux+vy)/N = 0,1,2,\ldots,n,\ldots$

の直線は以下のようになる．

この直線は $\cos 2\pi n = 1$ を与える．

(u,v) は空間的な波の周波数を与える．

⇒『空間周波数』と呼ばれる．



u : x方向の周波数成分

v : y方向の周波数成分

$(ux+vy)/N = 0,1,2,\ldots,n,\ldots$

において，$y=0$ とおくと

（すなわち x 軸上に注目すると），

$ux/N = 0,1,2\ldots \Leftrightarrow x = 0, N/u, 2N/u, \ldots$

で $\cos(ux/N) = 1$ となる．

「u が小さい」$\Leftrightarrow$「間隔が大きい」

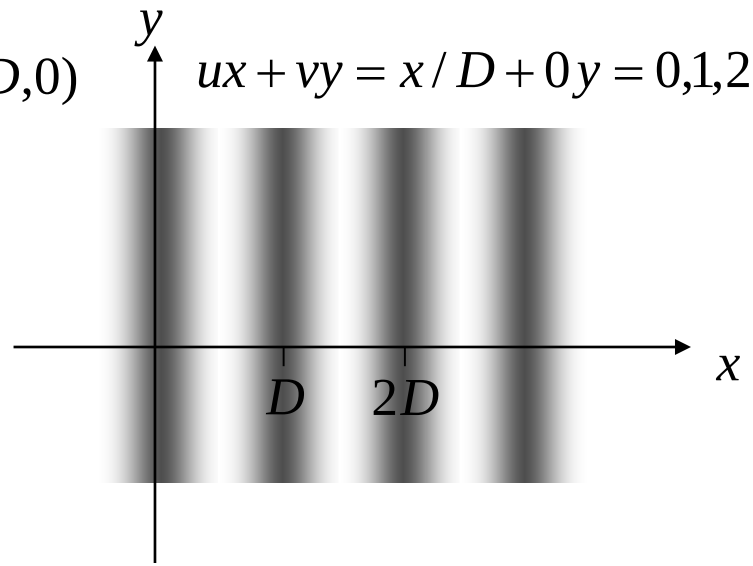
空間周波数の例

連続系の表現 $\cos 2\pi(ux+vy)$

例１）

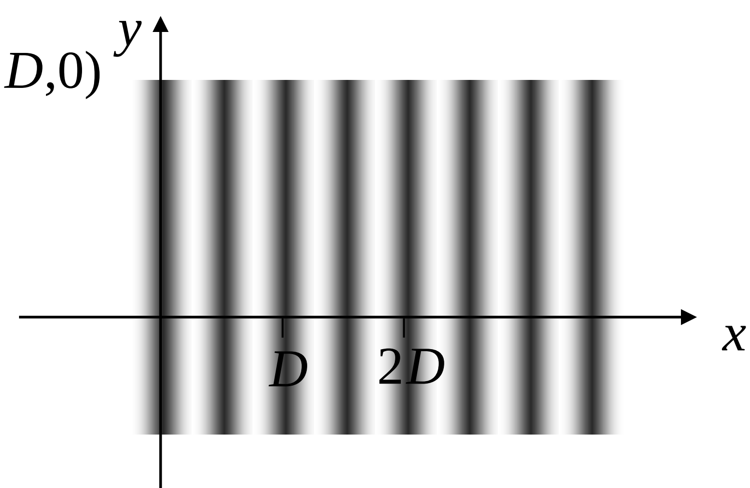
$(u,v)=(1/D,0)$

$ux+vy=x/D+0y=0,1,2,\ldots \Leftrightarrow x=0,\ D,\ 2D,\ldots$



例２）

$(u,v)=(2/D,0)$



$ux+vy=2x/D+0y=0,1,2,\ldots \Leftrightarrow x=0,\ D/2,\ D,3D/2,\ldots$

空間周波数の例

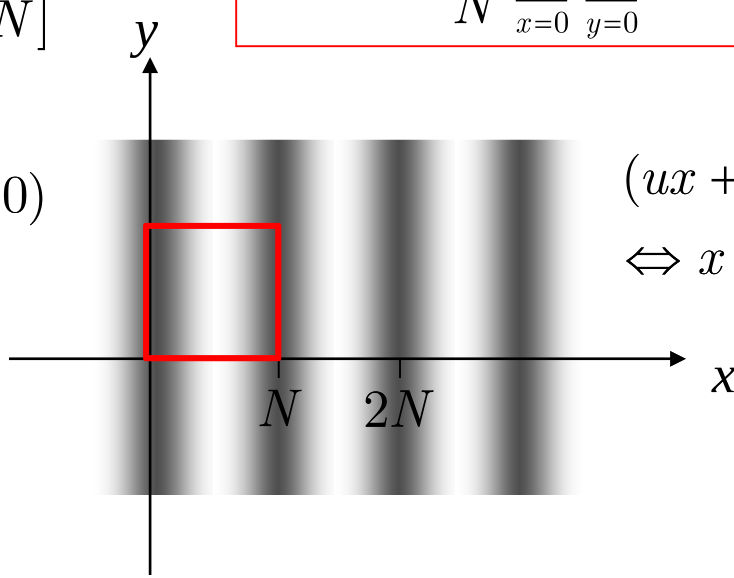
離散系の表現

$$F(u,v) = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\exp\{-j2\pi(ux+vy)/N\}$$

$\cos[2\pi(ux+vy)/N]$

例１）

$(u,v) = (1,0)$

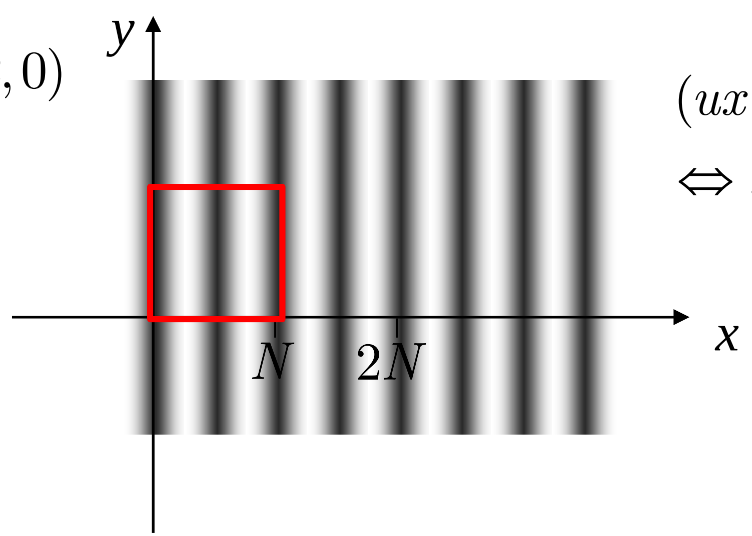


$$(ux+vy)/N = x/N = 0,1,2,\ldots$$

$$\Leftrightarrow x = 0,\quad N,\quad 2N,\ldots$$

例２）

$(u,v) = (2,0)$

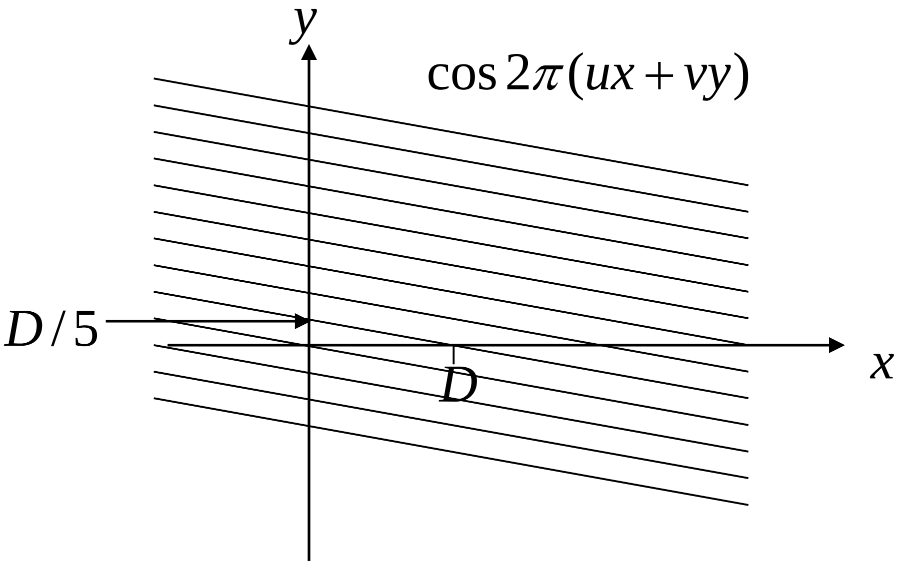


$$(ux+vy)/N = 2x/N = 0,1,2,\ldots$$

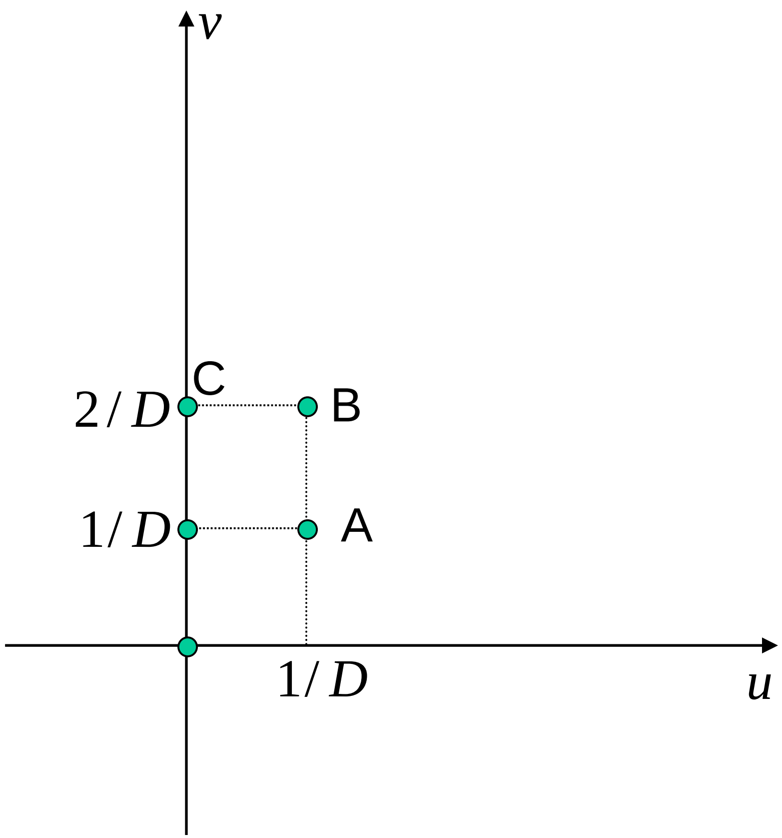
$$\Leftrightarrow x = 0,\quad N/2,\quad N, 3N/2,\ldots$$

演習

例題１
下の図に対応する余弦関数を式で書きなさい．ただし黒い線は１の値をもち，余弦関数の最大値を描いているものとする．
また，その空間周波数の位置をuv平面上に図示しなさい．

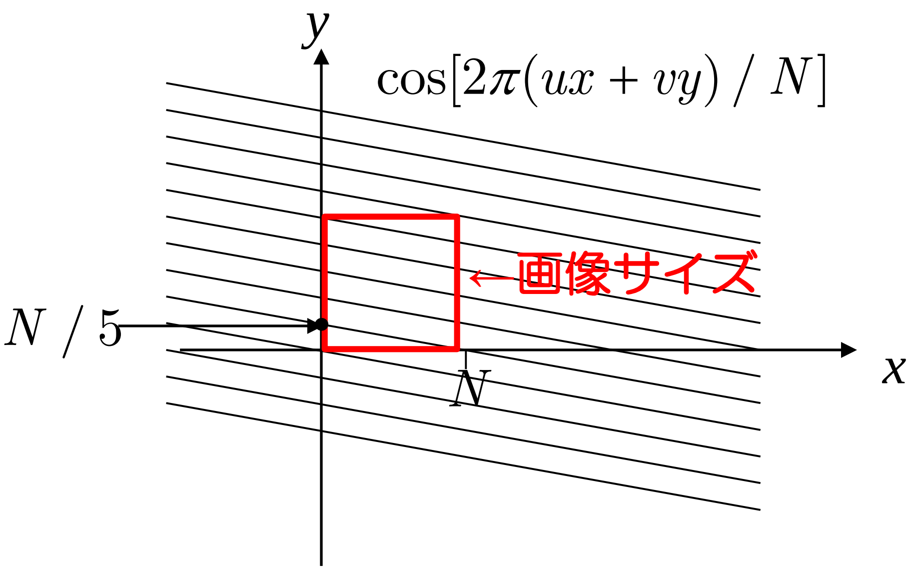


例題２
上図A,B,Cの位置に対応する空間周波数のパターン（余弦波）をスケッチしなさい．

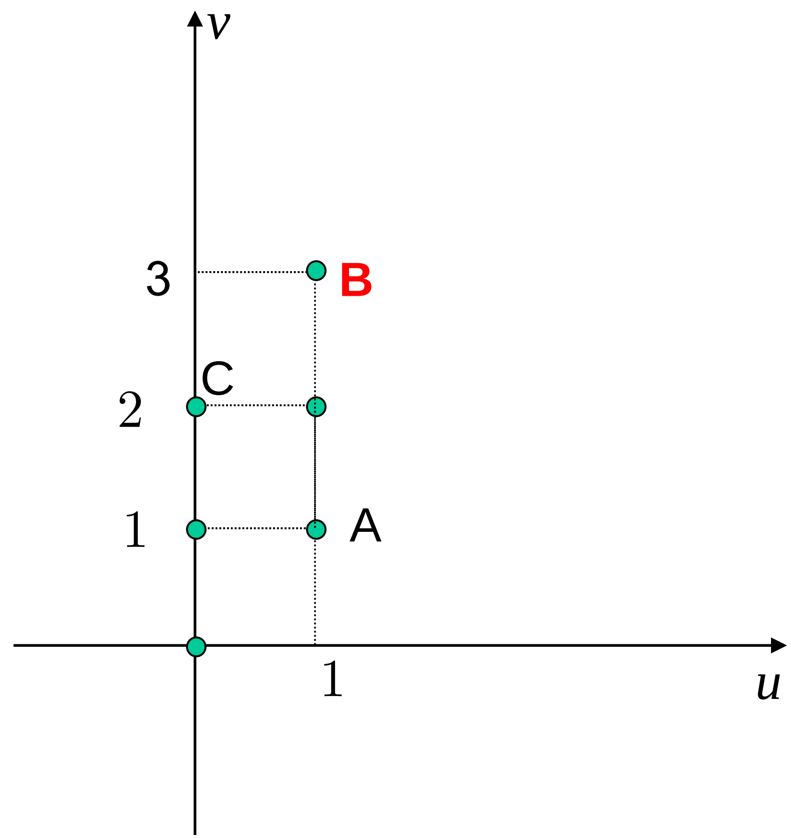


演習

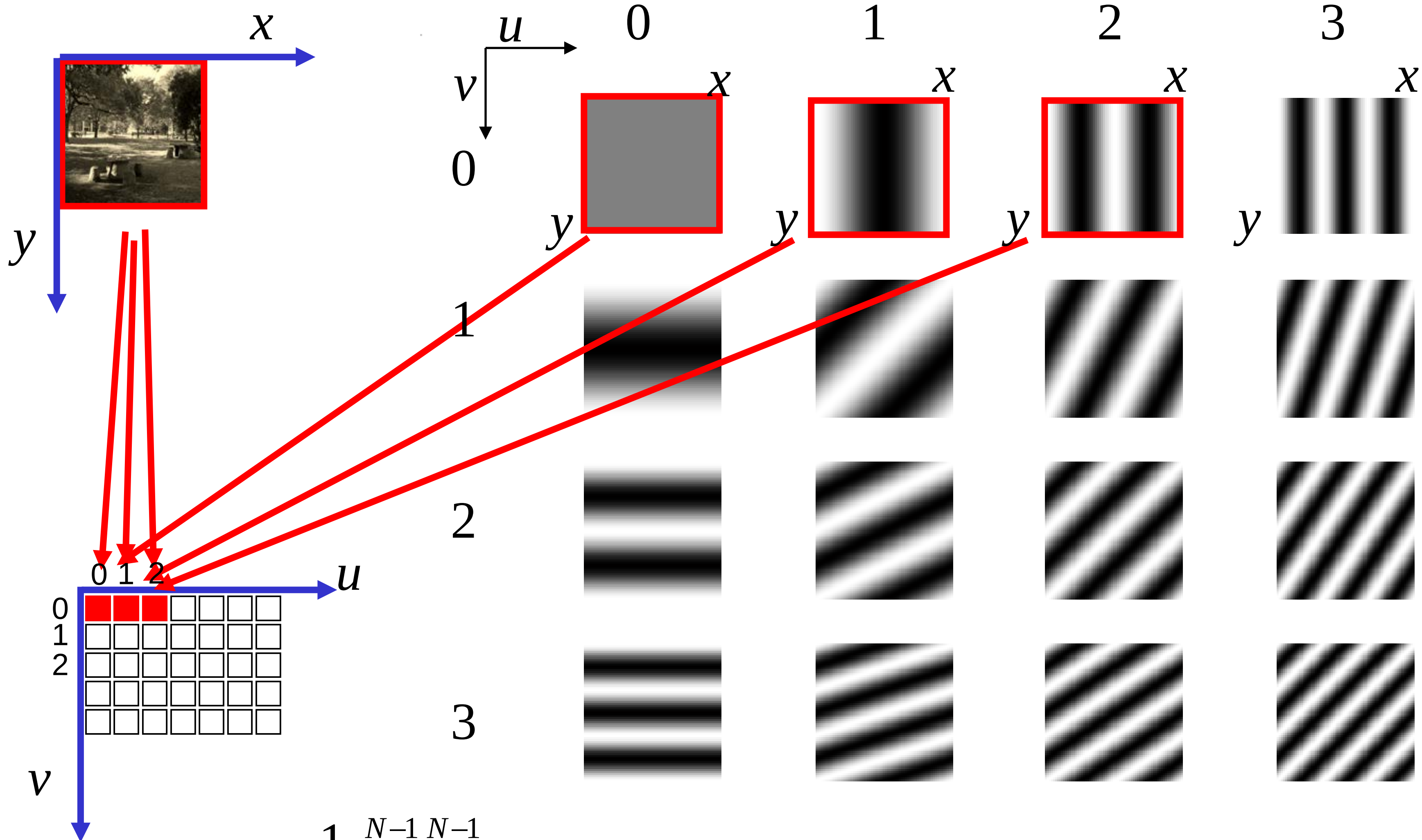
例題１
下の図に対応する余弦関数を式で書きなさい．ただし黒い線は１の値をもち，余弦関数の最大値を描いているものとする．
また，その空間周波数の位置をuv平面上に図示しなさい．



例題２
下図A,B,Cの位置に対応する空間周波数のパターン（余弦波）をスケッチしなさい．



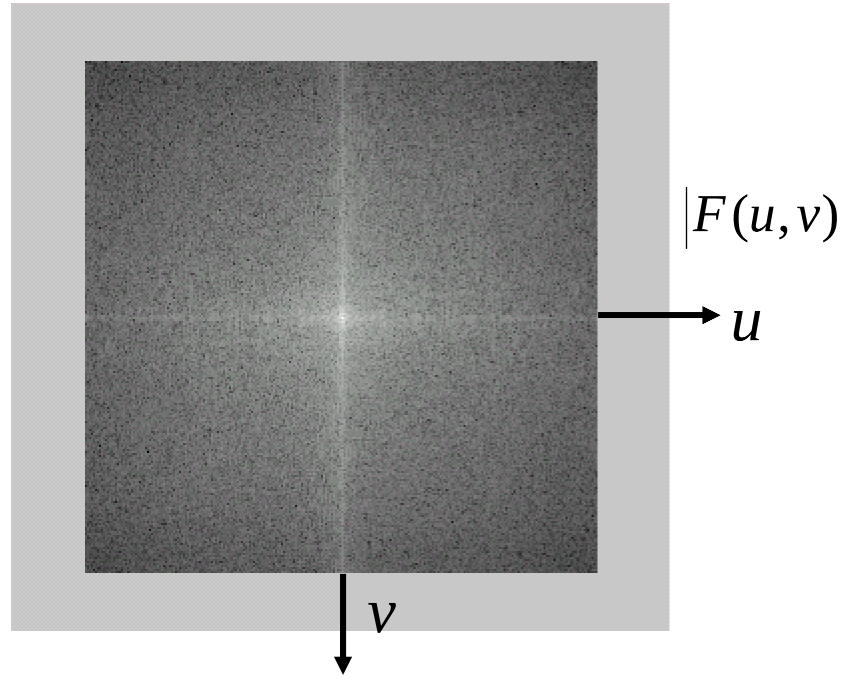
フーリエ変換演算のまとめ

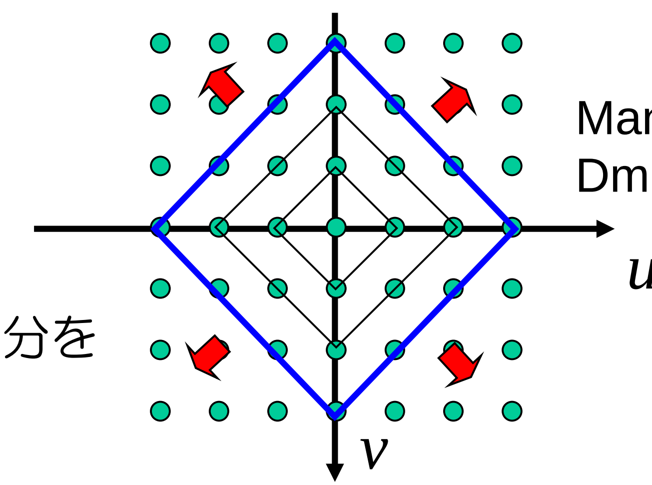


$$F(u,v)=\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1} f(x,y)\exp\{-j2\pi(ux+vy)/N\}$$

フーリエの合成のデモ

F.T.

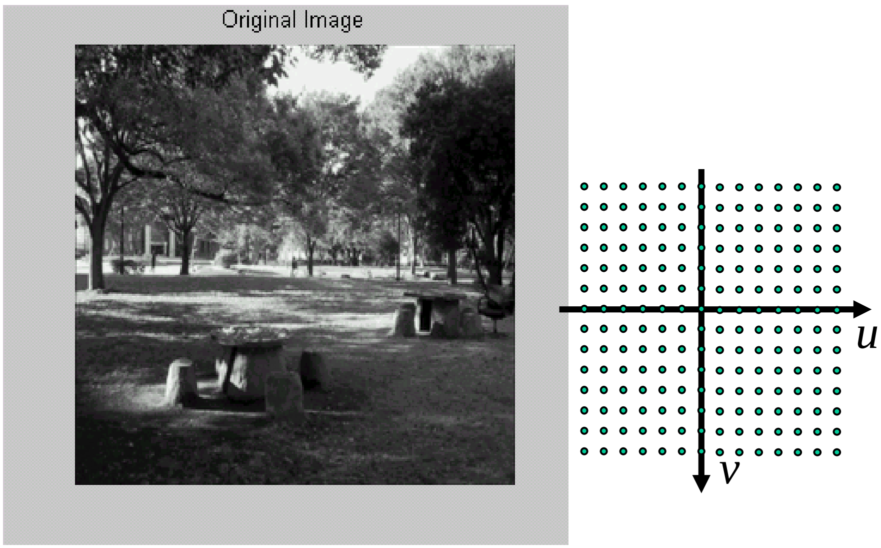


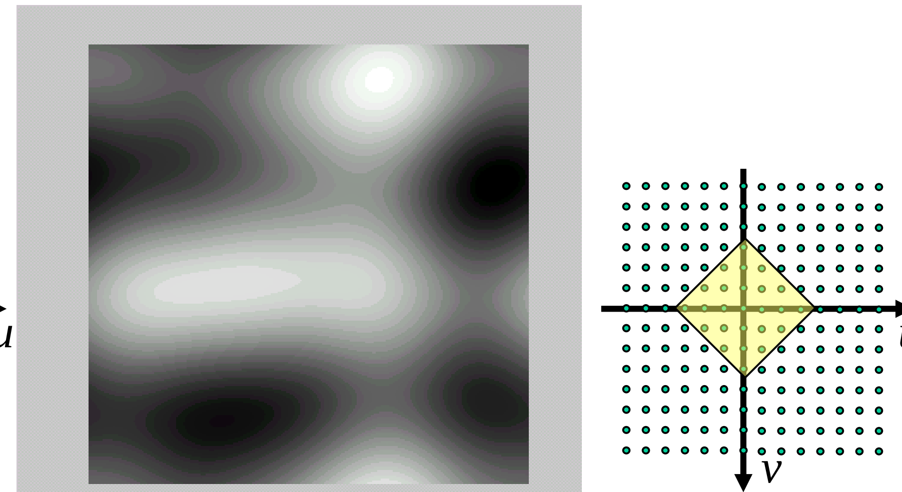


Manhattan distanceでDm=3のスペクトル

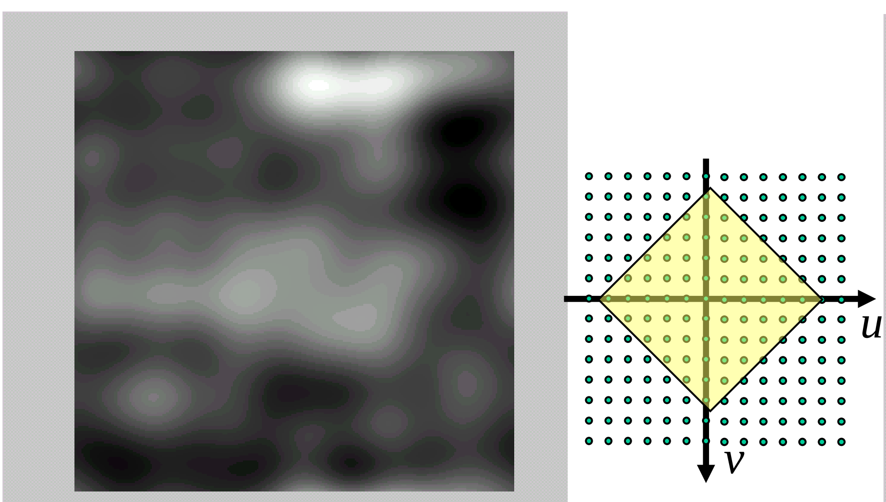
順次，高周波数成分を追加していく.

フーリエの合成のデモ（つづき）

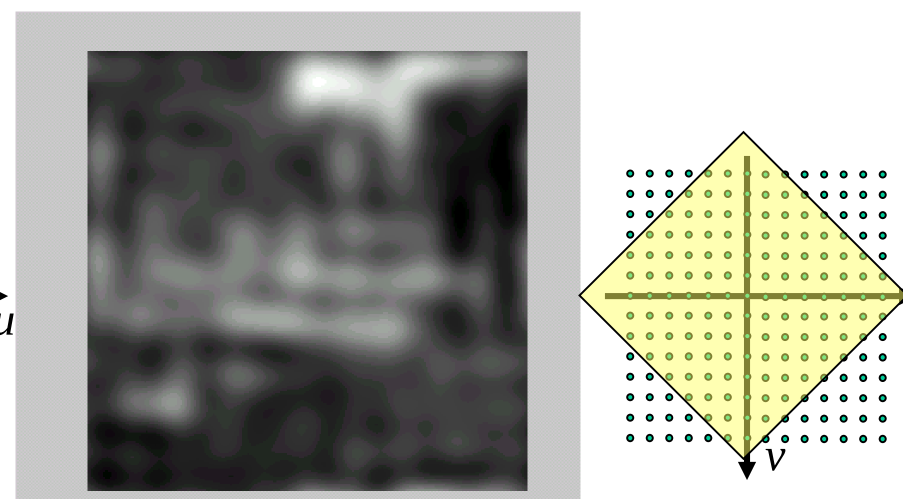




Dm=3まで



Dm=6まで



Dm=10まで

２次元フーリエ変換

講義内容

- 空間周波数の概念
- ２次元フーリエ変換
- 代表的な２次元フーリエ変換対
- ２次元離散フーリエ変換

代表的な２次元フーリエ変換対(1)

２変数のデルタ関数：

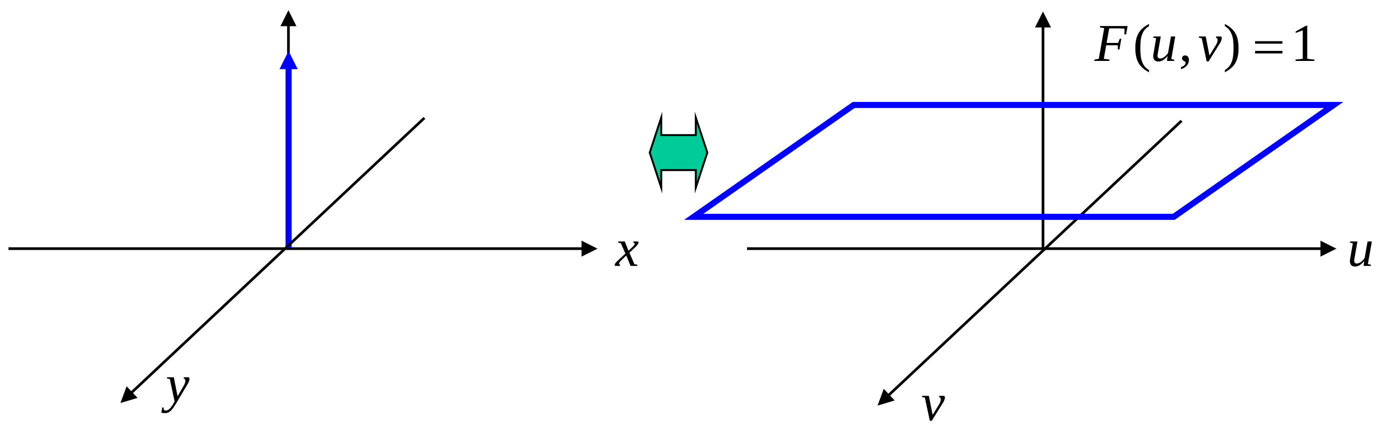
$\delta(x,y): x=0, y=0$で無限大になり，他で０の関数.

$\Downarrow$

$\delta(x-a,y-b): x=a, y=b$で無限大になり，他で０の関数.

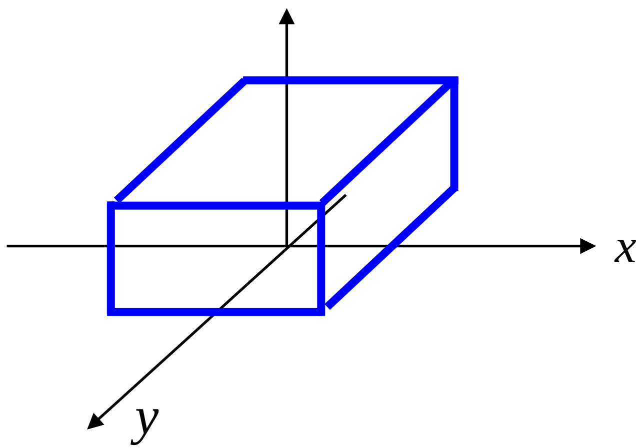
$$f(x,y)=\delta(x,y) \Leftrightarrow F(u,v)=1$$

$f(x,y)=\delta(x,y)$

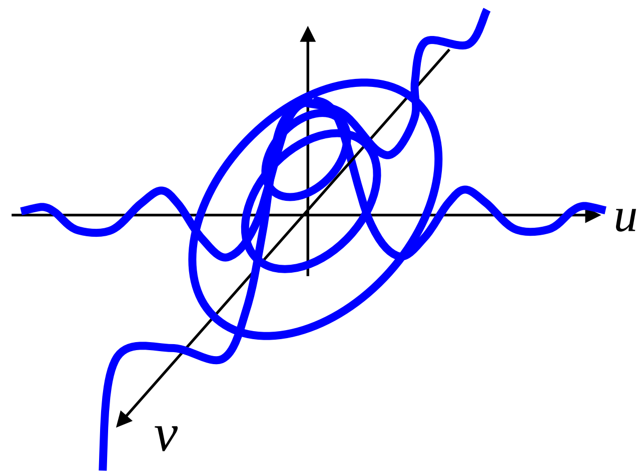


代表的な２次元フーリエ変換対(2)

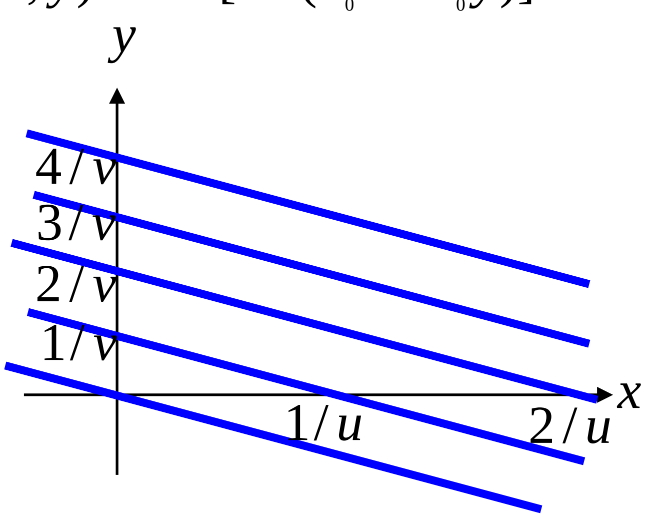
$$f(x,y) = \mathrm{rect}(x)\mathrm{rect}(y) \Leftrightarrow F(u,v) = \mathrm{sinc}(u)\mathrm{sinc}(v)$$



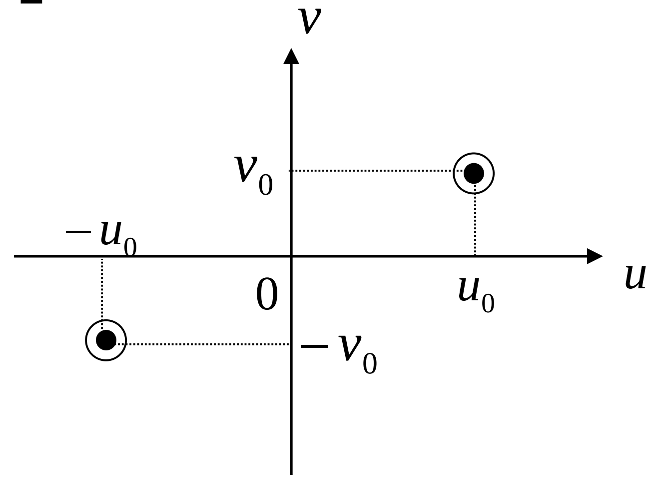
$\Leftrightarrow$



$$f(x,y) = \cos[2\pi(u_0 x + v_0 y)] \Leftrightarrow F(u,v) = \frac{1}{2}\{\delta(u-u_0, v-v_0) + \delta(u+u_0, v+v_0)\}$$



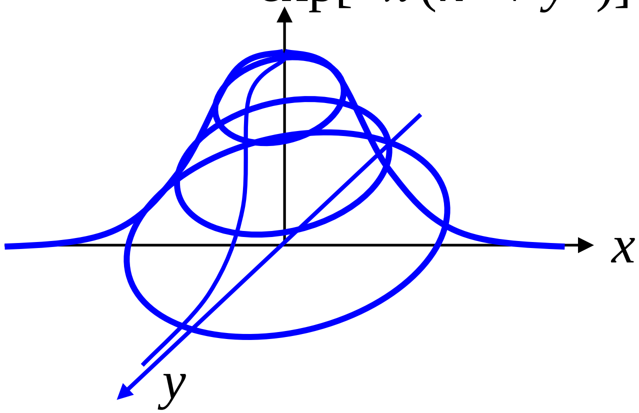
$\Leftrightarrow$



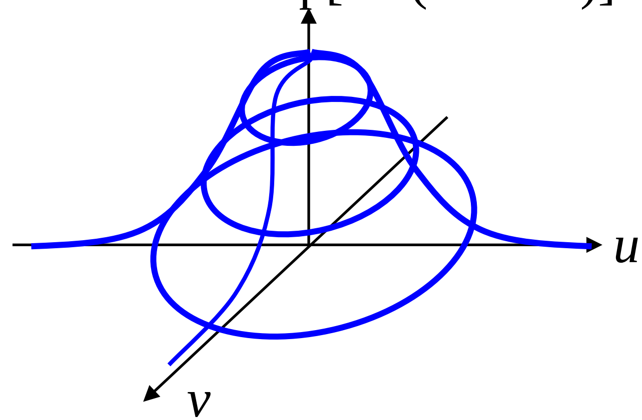
代表的な2次元フーリエ変換対(3)

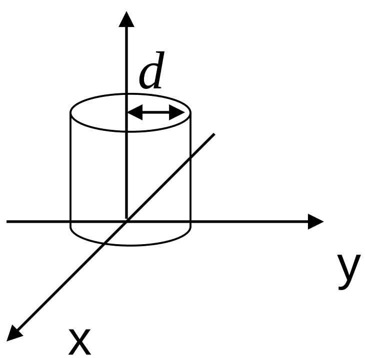
Gauss関数 $f(x,y)=\exp[-\pi r^2]$
$=\exp[-\pi(x^2+y^2)]$

$F(u,v)=\exp[-\pi\rho^2]$
$=\exp[-\pi(u^2+v^2)]$

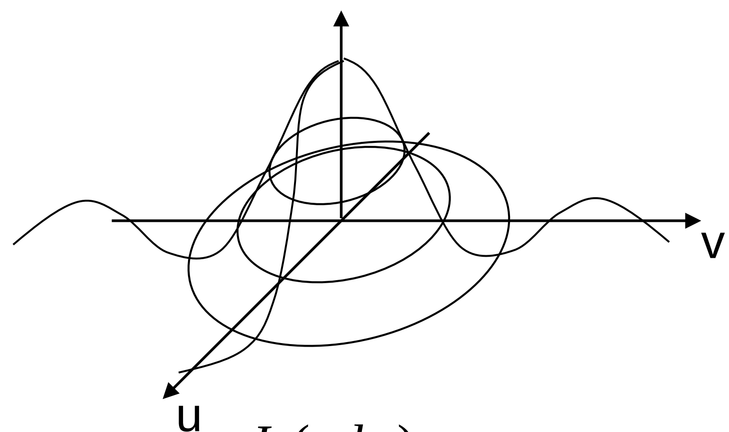


⇔





⇔



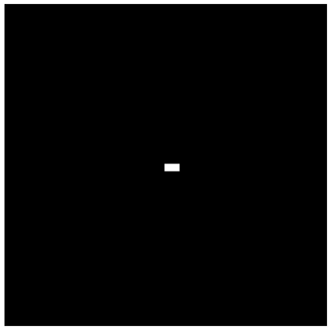
$f(x,y)=circ(\frac{r}{d})\qquad r=\sqrt{x^2+y^2}$

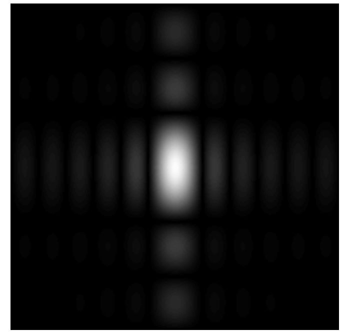
$F(u,v)=\pi d^2\frac{J_1(\pi d\rho)}{\pi d\rho},\qquad \rho=\sqrt{u^2+v^2}$

J_1: ベッセル関数

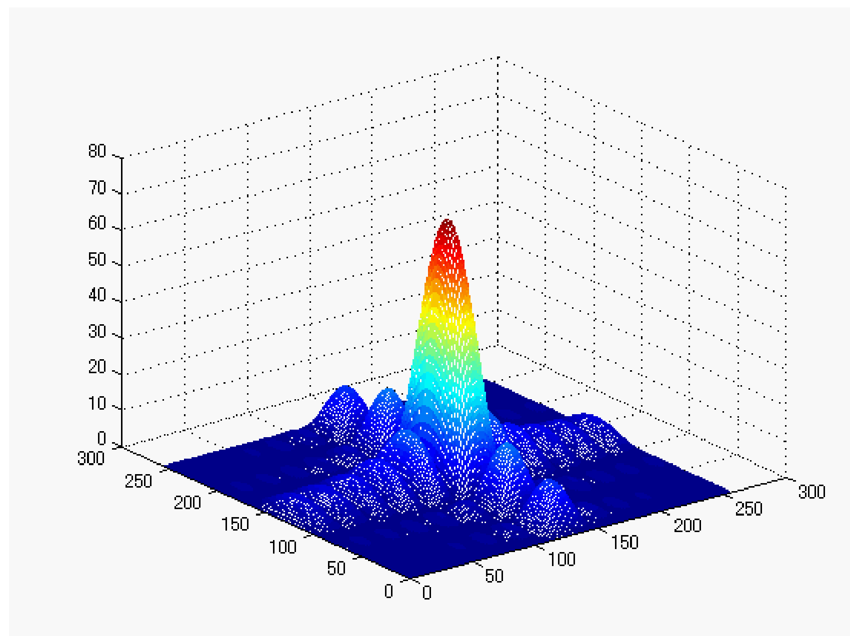
２次元フーリエ変換の計算例―矩形1―

$$f(x,y)=\mathrm{rect}(\frac{x}{a})\mathrm{rect}(\frac{y}{b})\Leftrightarrow F(u,v)=\mathrm{sinc}(au)\mathrm{sinc}(bv)$$



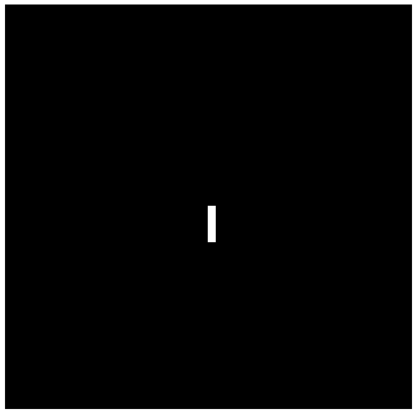


$$a=12, b=6$$

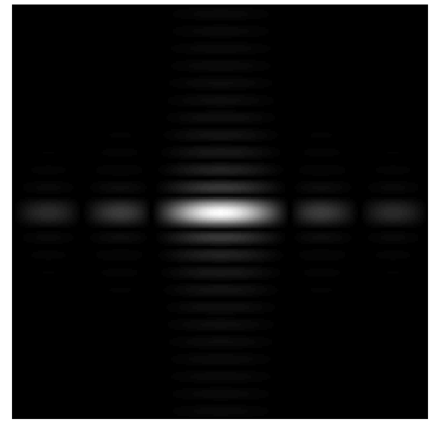


２次元フーリエ変換の計算例－矩形1－

$$f(x,y) = \mathrm{rect}(\frac{x}{a})\mathrm{rect}(\frac{y}{b}) \Leftrightarrow F(u,v) = \mathrm{sinc}(au)\mathrm{sinc}(bv)$$

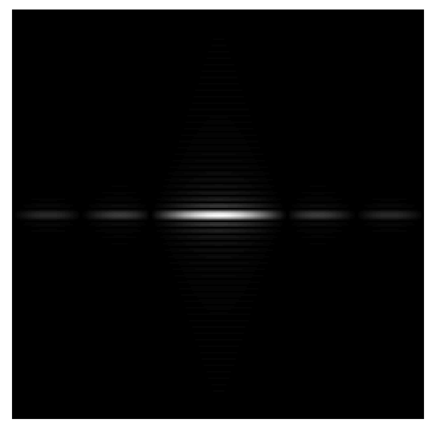


$\Leftrightarrow$



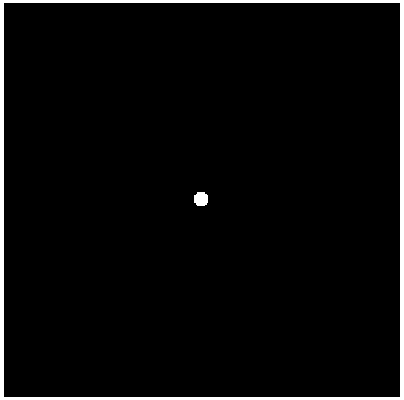
$a = 6, b = 24$

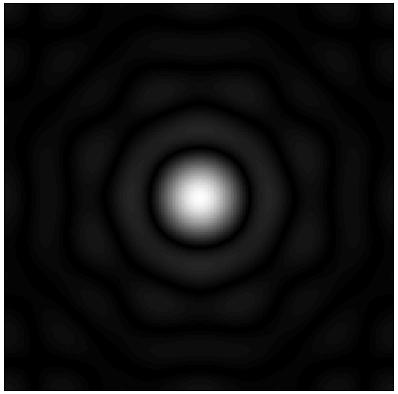
$\Leftrightarrow$

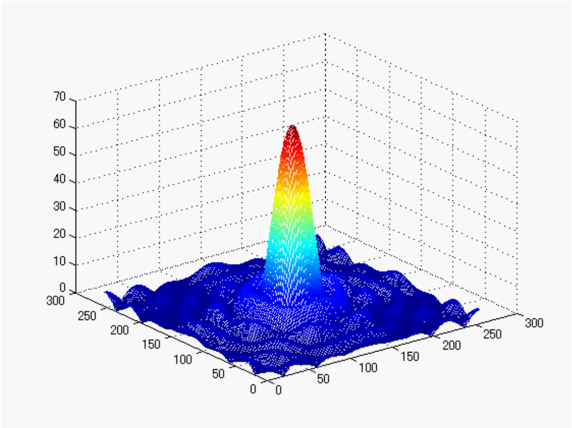


$a = 6, b = 64$

２次元フーリエ変換の計算例ー円形１ー







$$f(x,y) = circ(\frac{r}{d}) \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

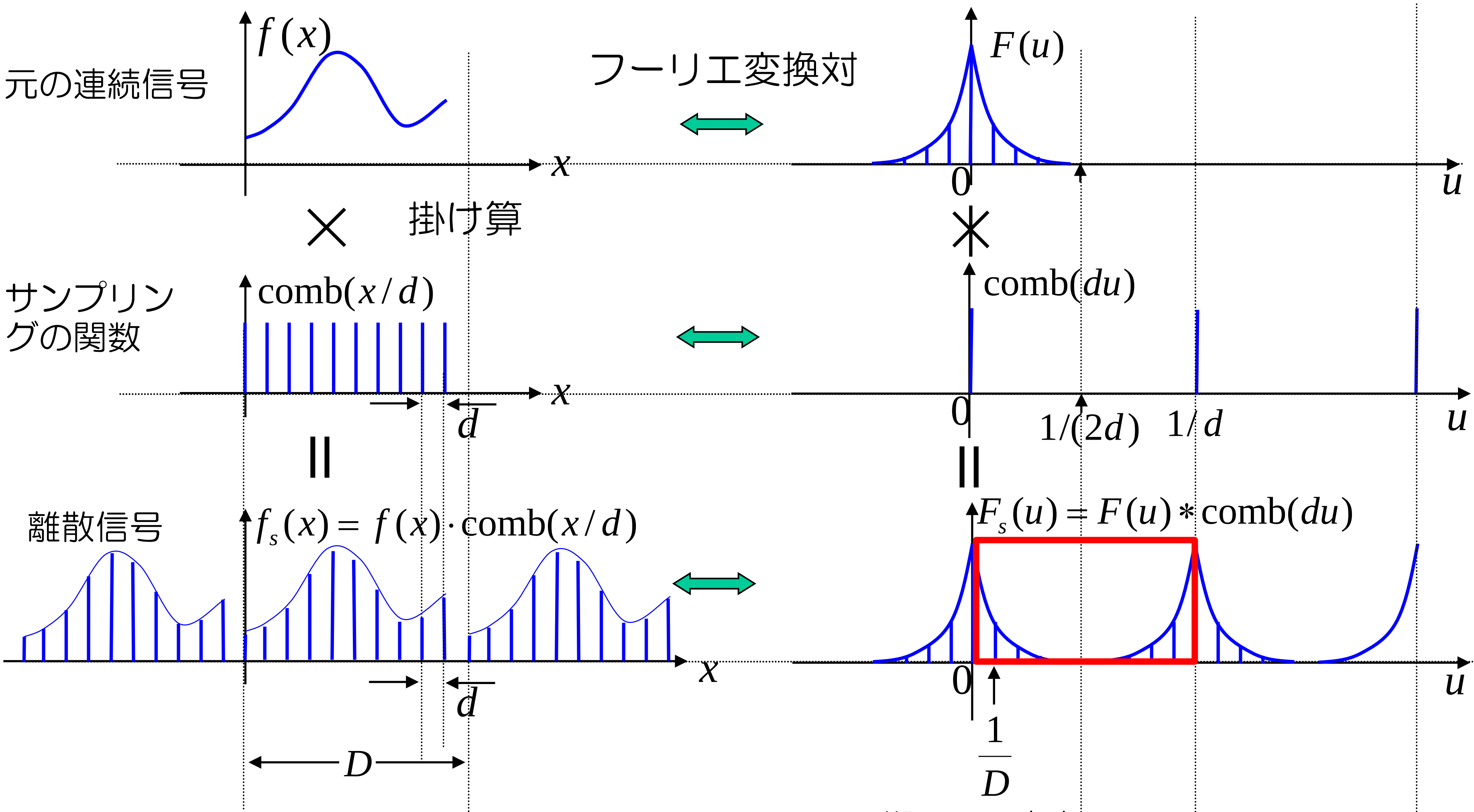
$$F(u,v) = \pi d^2 \frac{J_1(\pi d \rho)}{\pi d \rho}, \qquad \rho = \sqrt{u^2 + v^2}$$

２次元フーリエ変換

講義内容

- 空間周波数の概念
- ２次元フーリエ変換
- 代表的な２次元フーリエ変換対
- ２次元離散フーリエ変換

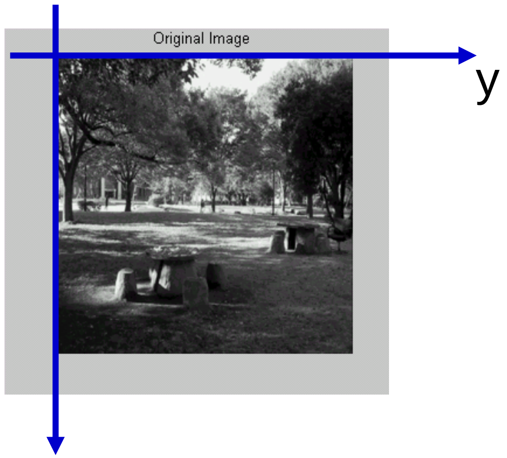
△ 離散フーリエ変換の概念 －まずは１次元－



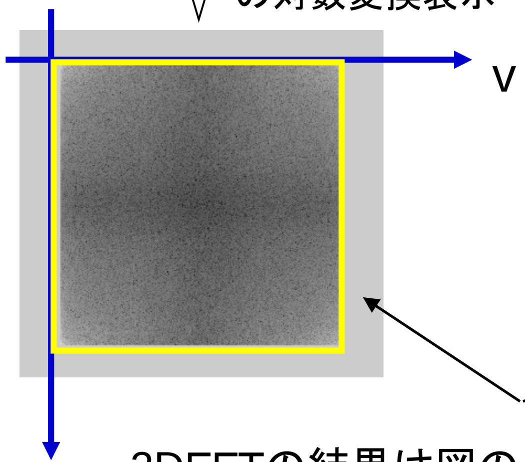
$$F(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \exp(-j2\pi ux/N)$$

Ｄの範囲に対して，基底関数を掛けてフーリエ成分を計算しているということは，暗黙のうちに上記のような実空間信号の周期性を仮定していることになる．

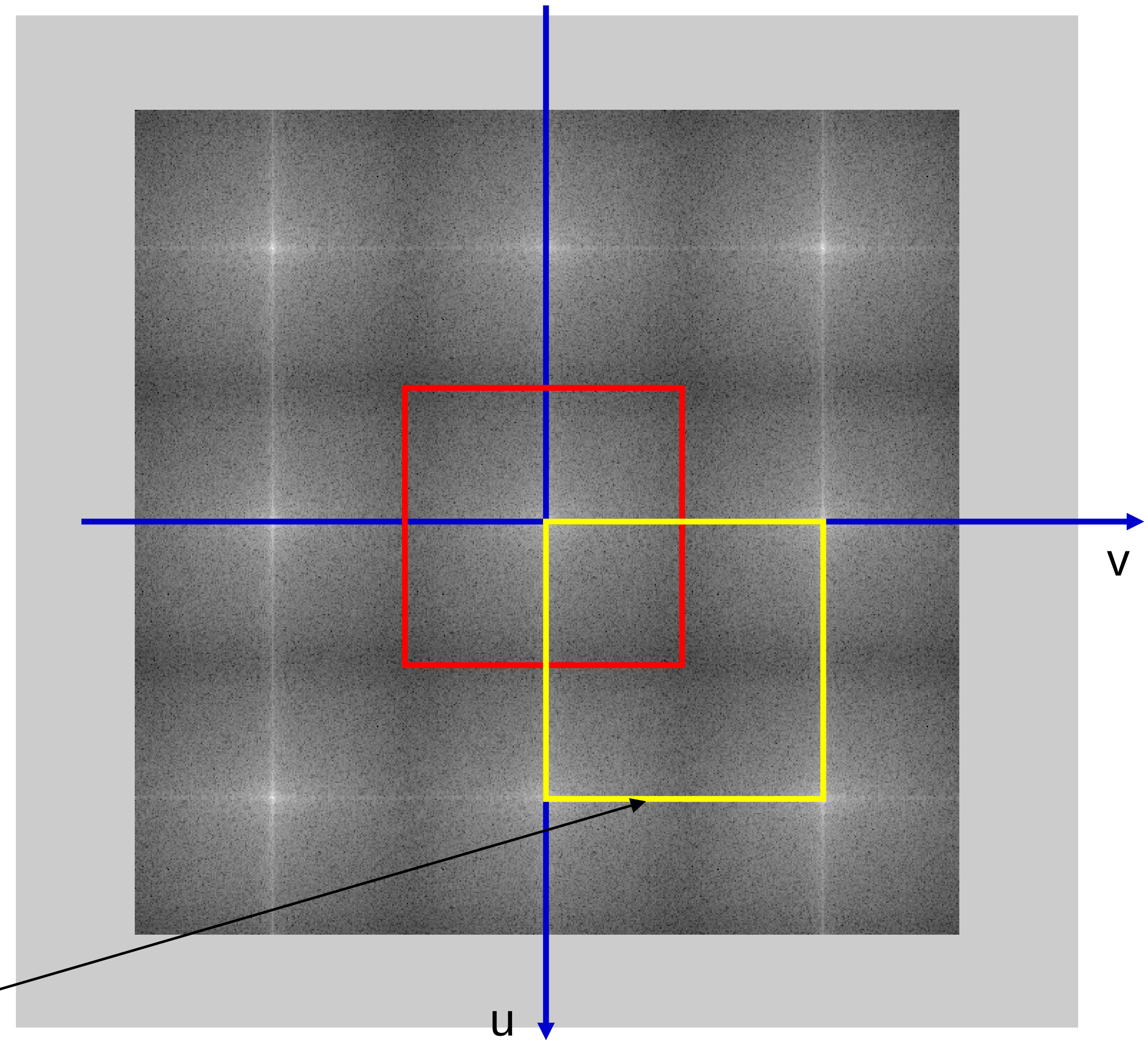
２次元離散フーリエ変換



2次元フーリエ変換
および振幅（絶対値）
の対数変換表示

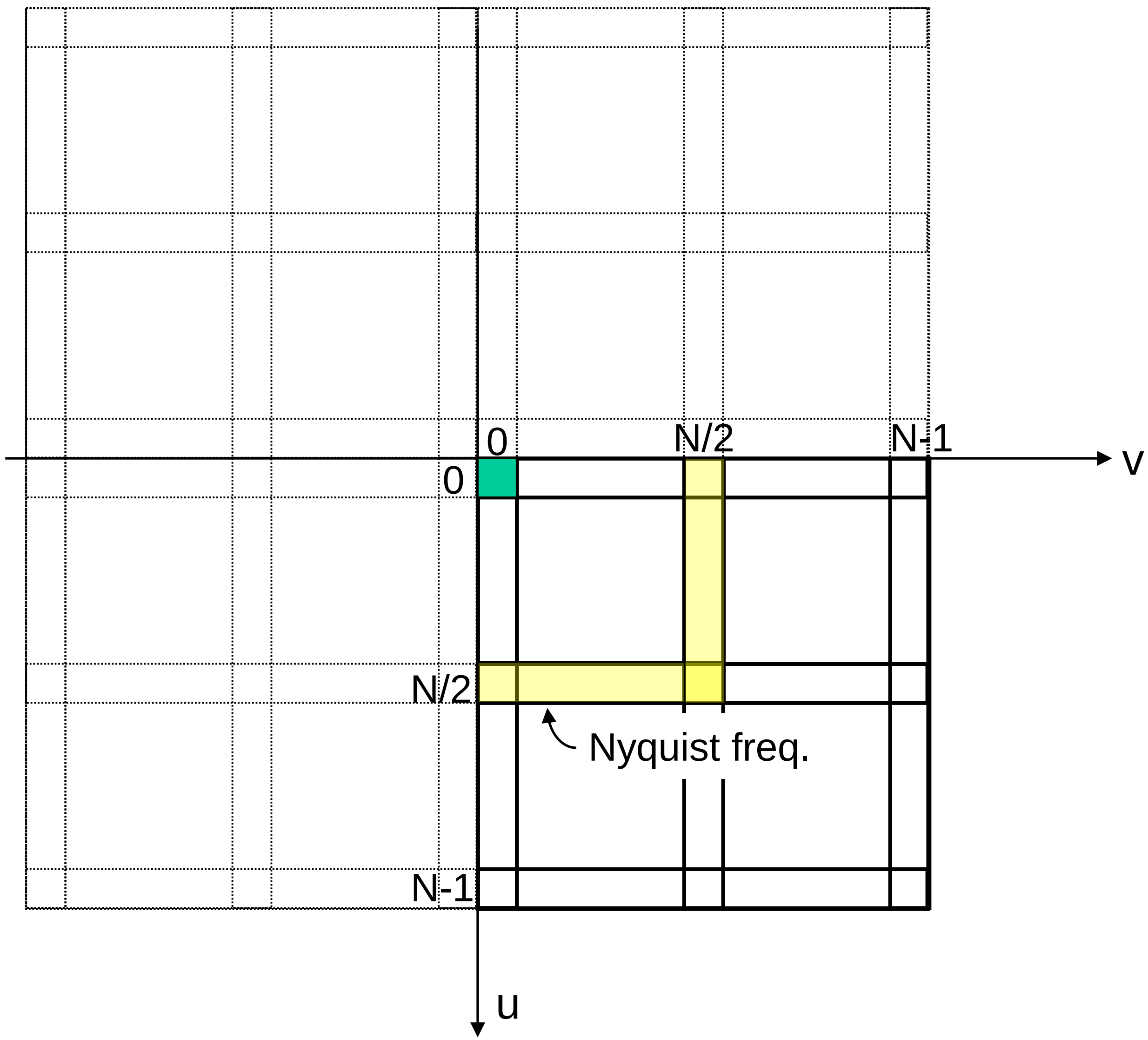


2DFFTの結果は図のように原点を端として切り出されたスペクトルと解釈できる.



一般に，赤枠のように，原点が中央になるように配列し直して表示する方がわかりやすい.

２次元離散フーリエ変換のデータの並び



境界部分での不連続によるスペクトル