

信号の階層的近似

連続信号から一定間隔でN個の値 c_0, c_1, \dots, c_{N-1} をサンプルしたとする。

ただしNは2のべき乗とする。すなわち $N = 2^n$
サンプル間隔を1とする長さの単位をとり、
信号を次の段階関数で近似する。

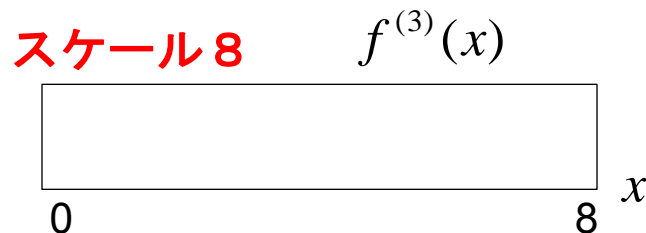
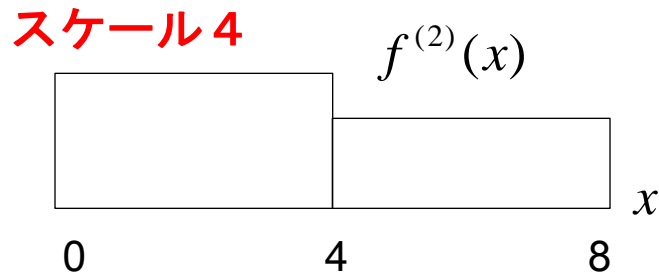
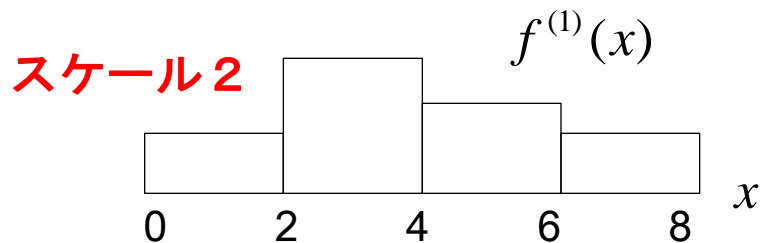
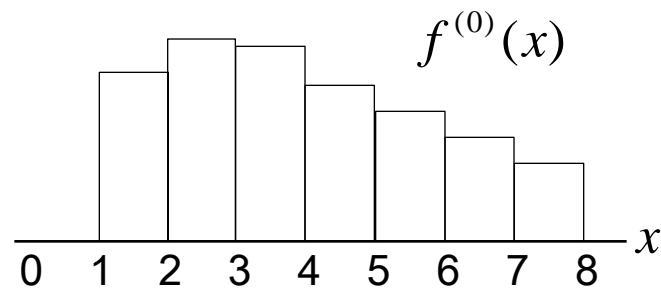
$$f^{(0)} = \begin{cases} c_0 & 0 \leq x < 1 \\ c_1 & 1 \leq x < 2 \\ \vdots & \\ c_{N-1} & N-1 \leq x < N \end{cases}$$

次に、連続する2画素ごとに、値をその平均値で置き換えたものを $f^{(1)}(x)$ とする。

$$f^{(1)} = \begin{cases} c_0^{(1)} (= (c_0 + c_1)/2) & 0 \leq x < 2 \\ c_1^{(1)} (= (c_2 + c_3)/2) & 2 \leq x < 4 \\ \vdots & \\ c_{N/2-1}^{(1)} (= (c_{N-2} + c_{N-1})/2) & N-2 \leq x < N \end{cases}$$

値が一定の区間の幅を**スケール**と呼ぶ。

スケール1の信号



信号の階層的近似（つづき）

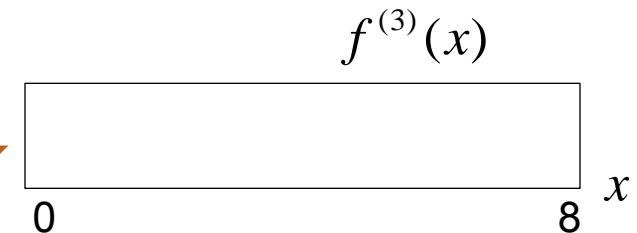
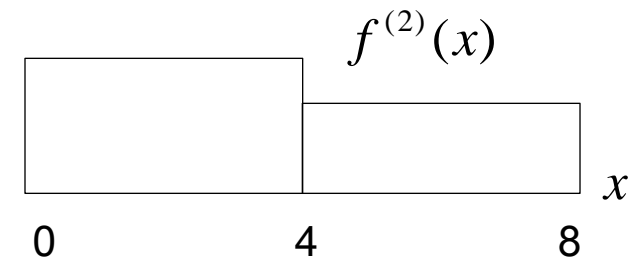
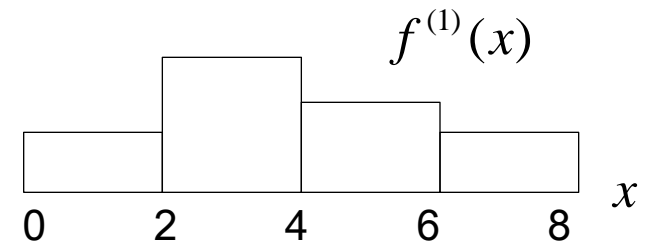
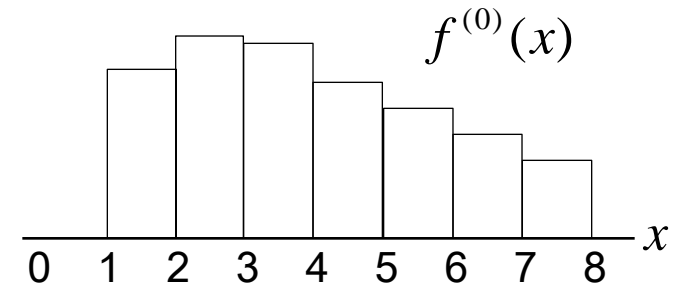
さらに，連続する4画素ごとに同様な平均操作を行ったスケール4の信号を $f^{(2)}(x)$ とする。

$$f^{(2)} = \begin{cases} c_0^{(2)} (= (c_0^{(1)} + c_1^{(1)})/2) & 0 \leq x < 4 \\ c_1^{(2)} (= (c_2^{(1)} + c_3^{(1)})/2) & 4 \leq x < 8 \\ \vdots \\ c_{N/4-1}^{(2)} (= (c_{N/2-2}^{(1)} + c_{N/2-1}^{(1)})/2) & N-4 \leq x < N \end{cases}$$

以下同様にすると，最終的に $f^{(n)}(x)$ がスケールNの定数関数となる。

$$f^{(n)}(x) = c_1^{(n)} (= (c_0^{(n-1)} + c_1^{(n-1)})/2) \quad 0 \leq x < N$$

スケールの逆数を**解像度**と呼ぶ。



階層的近似：逐次的にさまざまな解像度の信号を作り出すこと。

多重解像度分解

スケール1のもっとも詳細な信号 $f^{(0)}(x)$ とその次のスケール2の近似 $f^{(1)}(x)$ との差を $g^{(1)}(x)$ とする。

$$f^{(0)}(x) = g^{(1)}(x) + f^{(1)}(x)$$

次に、スケール2の近似 $f^{(1)}(x)$ とスケール4の近似 $f^{(2)}(x)$ との差を $g^{(2)}(x)$ とする。

$$f^{(1)}(x) = g^{(2)}(x) + f^{(2)}(x)$$

同様に

$$f^{(2)}(x) = g^{(3)}(x) + f^{(3)}(x)$$

最終的に

$$f^{(n-1)}(x) = g^{(n)}(x) + f^{(n)}(x)$$

まとめると

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= g^{(1)}(x) + f^{(1)}(x) \\ &= g^{(1)}(x) + g^{(2)}(x) + f^{(2)}(x) \\ &= g^{(1)}(x) + g^{(2)}(x) + g^{(3)}(x) + f^{(3)}(x) \\ &\vdots \\ &= g^{(1)}(x) + g^{(2)}(x) + \dots + g^{(n)}(x) + f^{(n)}(x) \end{aligned}$$

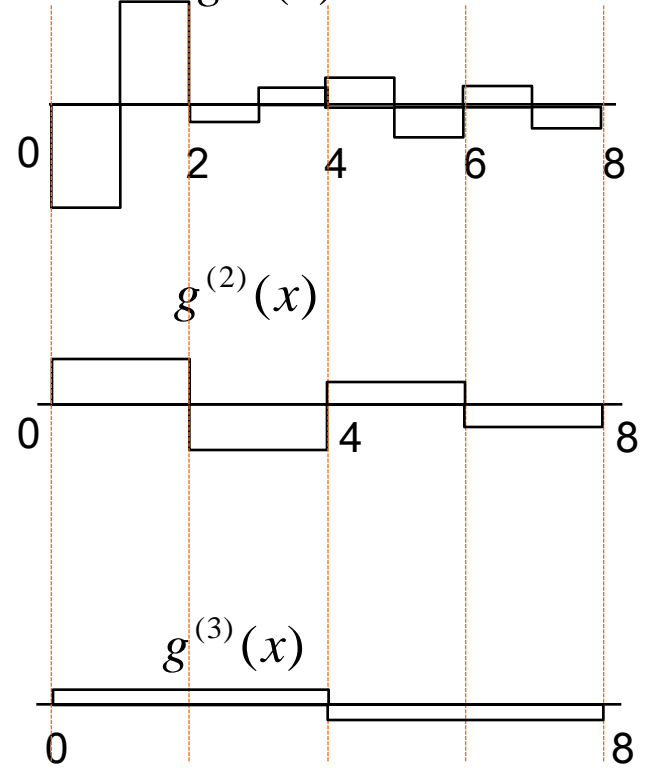
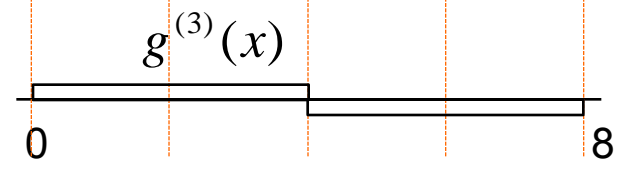
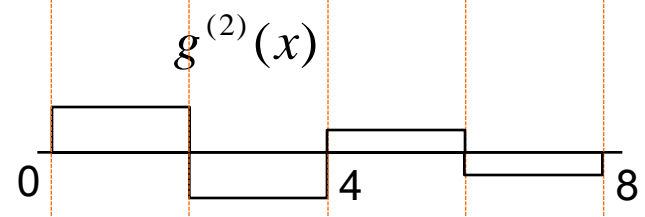
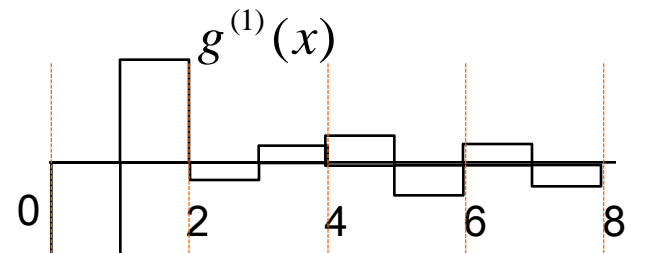
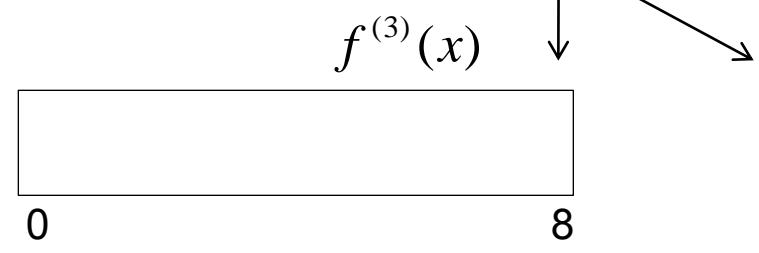
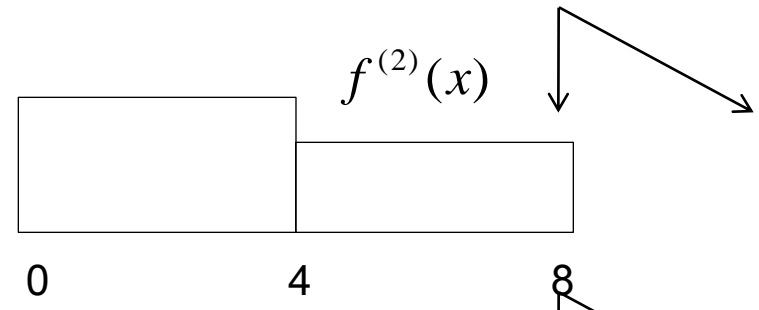
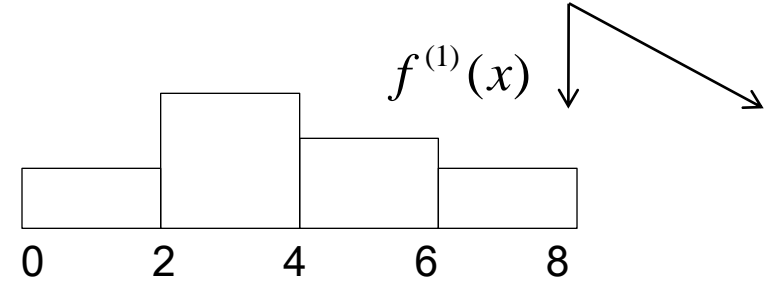
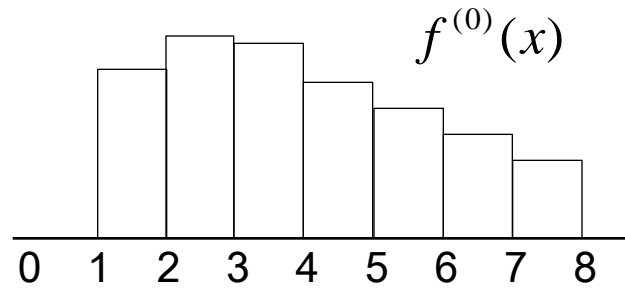
信号を異なるスケールの成分へ分解することを**多重解像度分解**と呼ぶ。

フーリエ解析との違い

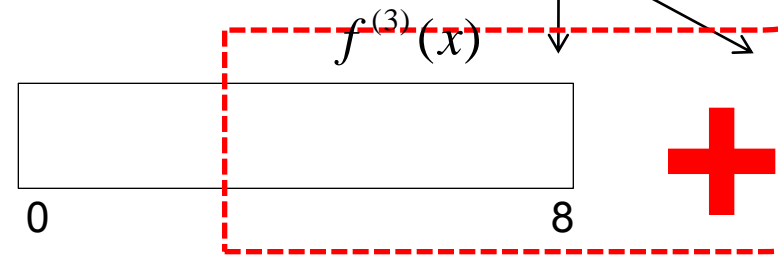
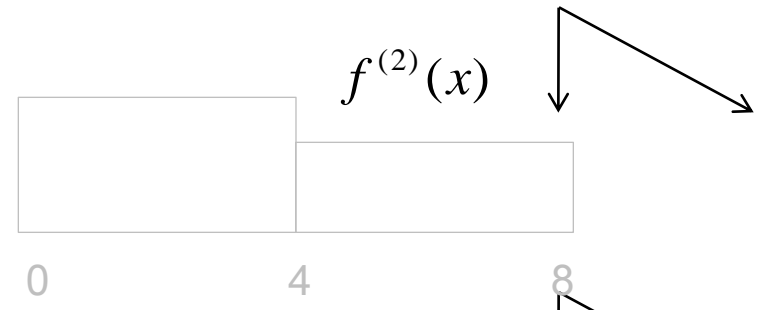
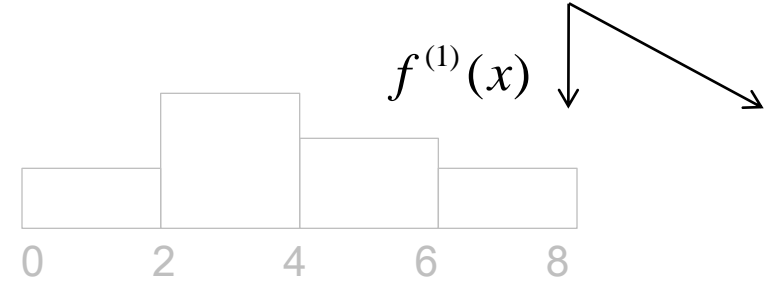
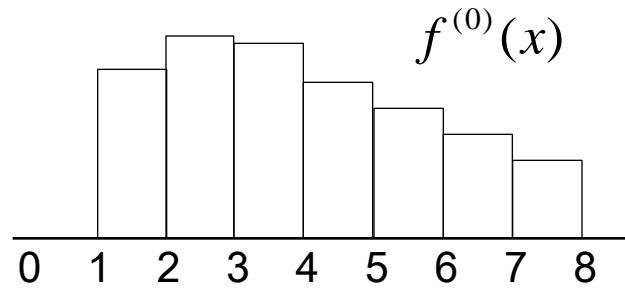
フーリエ解析：各成分は正弦波であり、振幅が場所によらず一定

多重解像度分解：各成分の振幅が場所ごとに変化

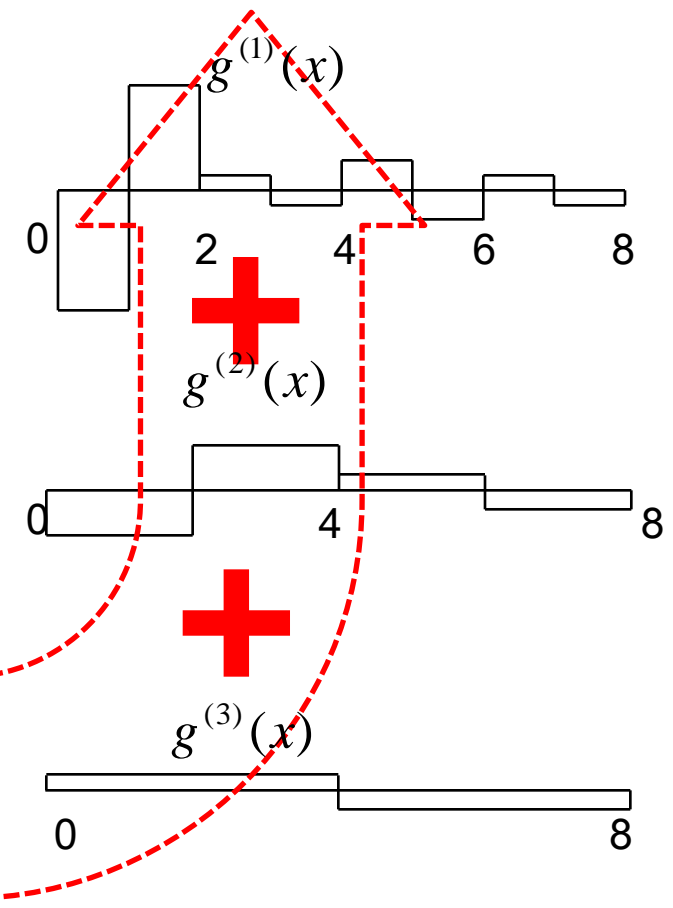
関数 $f^{(0)}(x)$ の多重解像度分解



関数 $f^{(0)}(x)$ の多重解像度分解



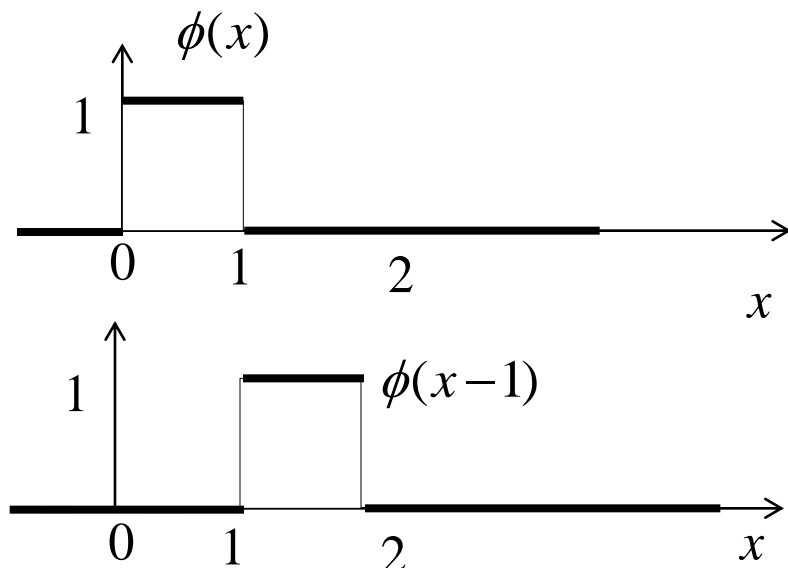
この加算で元にもどる



スケーリング関数の定義

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

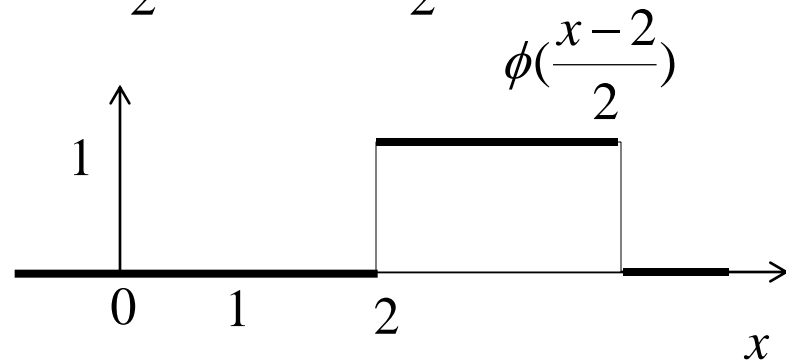
台：値が0でない区間 (support)



$$f^{(0)}(x) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k^{(0)} \phi(x-k), \quad c_k^{(0)} = c_k$$

$$f^{(1)}(x) = \sum_{k=0}^{N/2-1} c_k^{(1)} \phi\left(\frac{x}{2} - k\right), \quad c_k^{(1)} = \frac{c_{2k}^{(0)} + c_{2k+1}^{(0)}}{2} \quad \leftarrow \quad \phi\left(\frac{x}{2} - k\right) = \phi\left(\frac{x-2k}{2}\right)$$

$$f^{(2)}(x) = \sum_{k=0}^{N/4-1} c_k^{(2)} \phi\left(\frac{x}{4} - k\right), \quad c_k^{(2)} = \frac{c_{2k}^{(1)} + c_{2k+1}^{(1)}}{2}$$



$$f^{(j)}(x) = \sum_{k=0}^{N/2^j-1} c_k^{(j)} \phi\left(\frac{x}{2^j} - k\right), \quad c_k^{(j)} = \frac{c_{2k}^{(j-1)} + c_{2k+1}^{(j-1)}}{2}$$

関数の内積を以下のように定義する

$$(p, q) = \int_0^N p(x)q(x)dx$$

スケーリング関数を

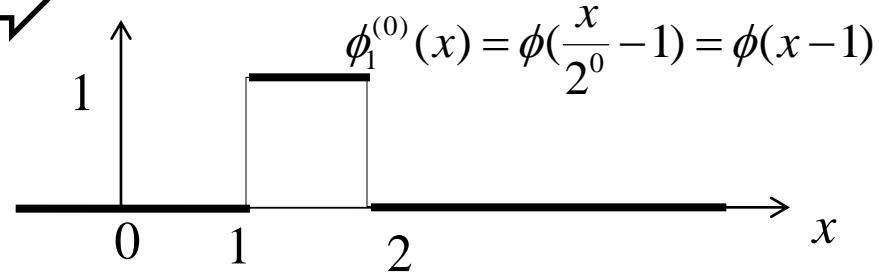
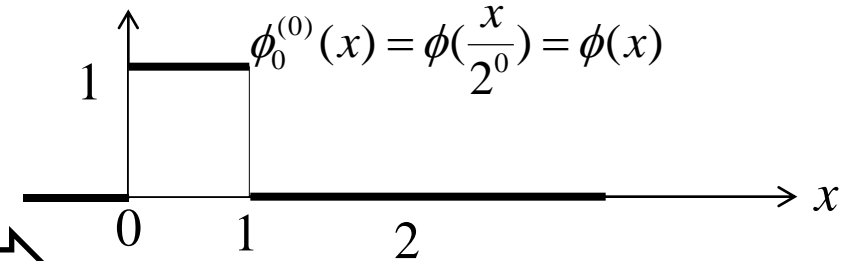
$$\phi_k^{(j)}(x) = \phi\left(\frac{x}{2^j} - k\right)$$

と表せば、

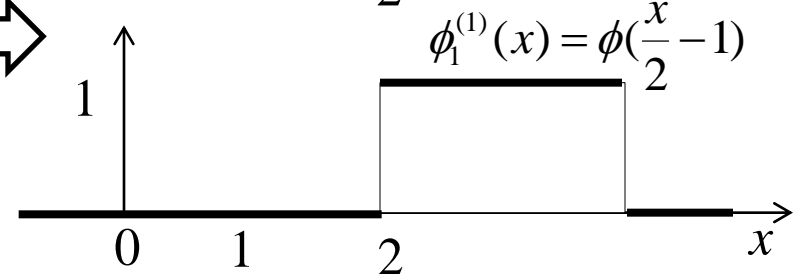
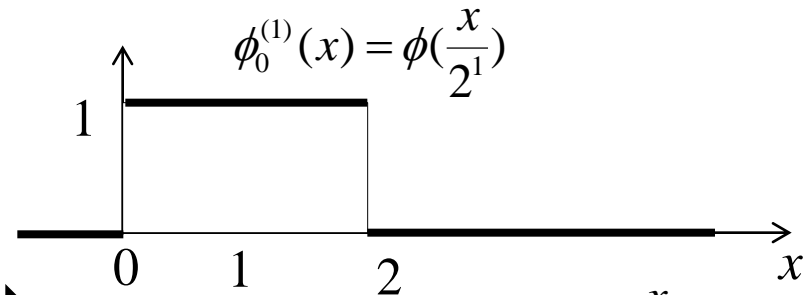
$$(\phi_k^{(j)}, \phi_{k'}^{(j)}) = \int_0^N \phi_k^{(j)}(x)\phi_{k'}^{(j)}(x)dx = 0, \quad k \neq k'$$

が、成り立つ。
すなわち、関数 ϕ は直交系となる。

内積は 0



内積は 0

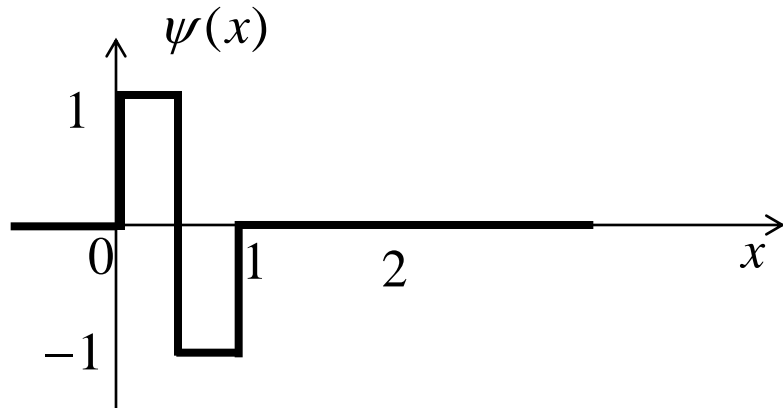


$f^{(n)}(x)$ のウェーブレット母関数による表現

ウェーブレット母関数の定義

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1/2 \\ -1 & 1/2 \leq x < 1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

差の関数は、ウェーブレット母関数を用いて以下のように表される.



ただし

$$d_k^{(1)} = \frac{c_{2k}^{(0)} - c_{2k+1}^{(0)}}{2}$$

$$g^{(1)}(x) = f^{(0)}(x) - f^{(1)}(x)$$

$$= \begin{cases} c_0^{(0)} - (c_0^{(0)} + c_1^{(0)})/2 & 0 \leq x < 1 \\ c_1^{(0)} - (c_0^{(0)} + c_1^{(0)})/2 & 1 \leq x < 2 \\ c_2^{(0)} - (c_2^{(0)} + c_3^{(0)})/2 & 2 \leq x < 3 \\ c_3^{(0)} - (c_2^{(0)} + c_3^{(0)})/2 & 3 \leq x < 4 \\ \vdots & \vdots \\ c_{N-2}^{(0)} - (c_{N-2}^{(0)} + c_{N-1}^{(0)})/2 & N-2 \leq x < N-1 \\ c_{N-1}^{(0)} - (c_{N-2}^{(0)} + c_{N-1}^{(0)})/2 & N-1 \leq x < N \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (c_0^{(0)} - c_1^{(0)})/2 & 0 \leq x < 1 \\ -(c_0^{(0)} - c_1^{(0)})/2 & 1 \leq x < 2 \\ (c_2^{(0)} - c_3^{(0)})/2 & 2 \leq x < 3 \\ -(c_2^{(0)} - c_3^{(0)})/2 & 3 \leq x < 4 \\ \vdots & \vdots \\ (c_{N-1}^{(0)} - c_{N-2}^{(0)})/2 & N-2 \leq x < N-1 \\ -(c_{N-1}^{(0)} - c_{N-2}^{(0)})/2 & N-1 \leq x < N \end{cases}$$

$$= \sum_{k=0}^{N/2-1} d_k^{(1)} \psi\left(\frac{x}{2} - k\right)$$

$$\begin{aligned}
 g^{(2)}(x) &= f^{(1)}(x) - f^{(2)}(x) \\
 &= \begin{cases} c_0^{(1)} - (c_0^{(1)} + c_1^{(1)})/2 & 0 \leq x < 2 \\ c_1^{(1)} - (c_0^{(1)} + c_1^{(1)})/2 & 2 \leq x < 4 \\ \vdots & \vdots \\ c_{N-2}^{(1)} - (c_{N-2}^{(1)} + c_{N-1}^{(1)})/2 & N-4 \leq x < N-2 \\ c_{N-1}^{(1)} - (c_{N-2}^{(1)} + c_{N-1}^{(1)})/2 & N-2 \leq x < N \end{cases} \\
 &= \begin{cases} (c_0^{(1)} - c_1^{(1)})/2 & 0 \leq x < 2 \\ -(c_0^{(1)} - c_1^{(1)})/2 & 2 \leq x < 4 \\ \vdots & \vdots \\ (c_{N-1}^{(1)} - c_{N-2}^{(1)})/2 & N-4 \leq x < N-2 \\ -(c_{N-1}^{(1)} - c_{N-2}^{(1)})/2 & N-2 \leq x < N \end{cases} \\
 &= \sum_{k=0}^{N/4-1} d_k^{(2)} \psi\left(\frac{x}{4} - k\right)
 \end{aligned}$$

$$d_k^{(2)} = \frac{c_{2k}^{(1)} - c_{2k+1}^{(1)}}{2}$$

一般にスケール 2^j の関数 $g^{(j)}(x)$ は次のように書ける。

$$g^{(j)}(x) = \sum_{k=0}^{N/2^j-1} d_k^{(j)} \psi\left(\frac{x}{2^j} - k\right) \quad j=1, \dots, n$$

ここで、

$$d_k^{(j)} = \frac{c_{2k}^{(j-1)} - c_{2k+1}^{(j-1)}}{2}$$

レベルj、場所kのウェーブレットを、ウェーブレット母関数 ψ を使って、以下のように定義する。

$$\psi_k^{(j)}(x) = \psi\left(\frac{x}{2^j} - k\right)$$

異なる場所 k, k' のウェーブレット同士は直交する。

$$\begin{aligned}
 (\psi_k^{(j)}, \psi_{k'}^{(j)}) &= \int_0^N \psi_k^{(j)}(x) \psi_{k'}^{(j)}(x) dx = 0, \\
 k &\neq k'
 \end{aligned}$$

レベル j 、場所 k のウェーブレットとウェーブレット間の直交性

レベル j 、場所 k のウェーブレット
を、ウェーブレット母関数 ψ を使って、
以下のように定義する。

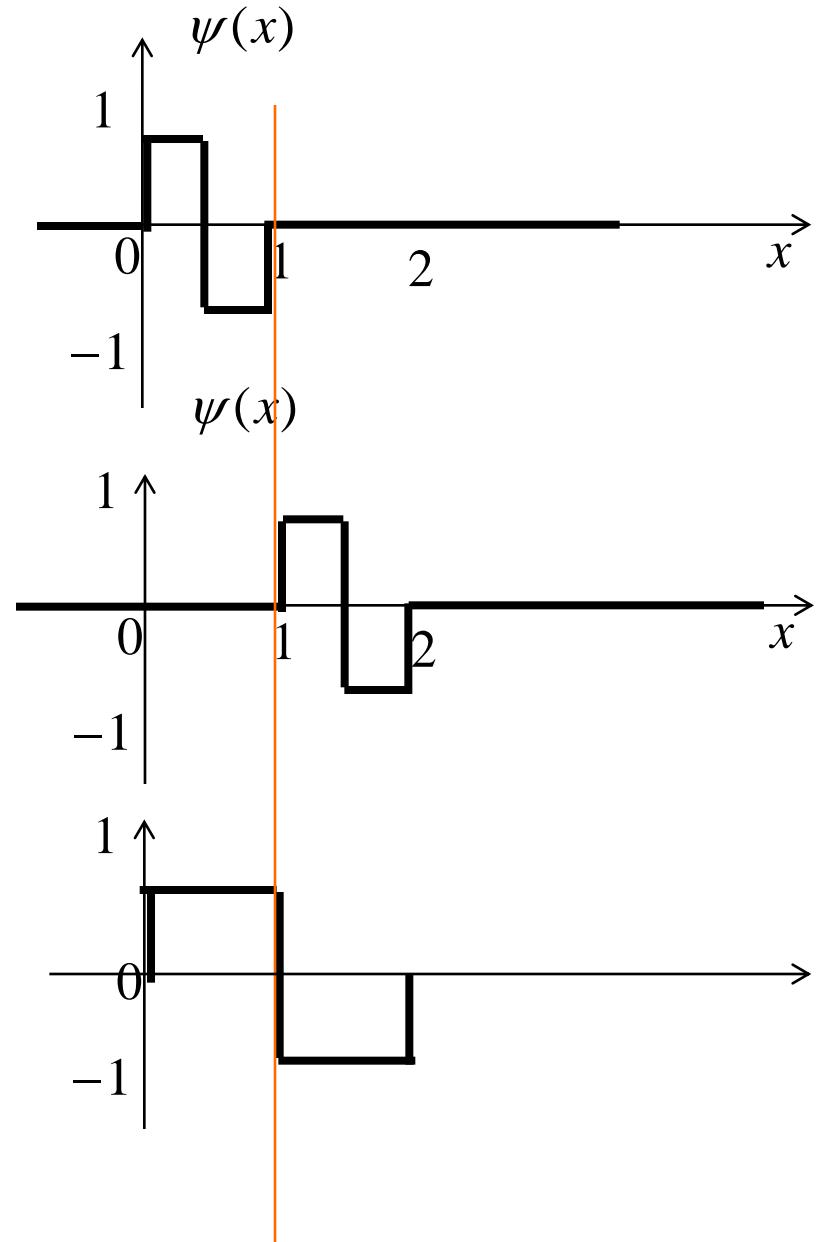
$$\psi_k^{(j)}(x) = \psi\left(\frac{x}{2^j} - k\right)$$

異なる場所のウェーブレット同士は直交する。

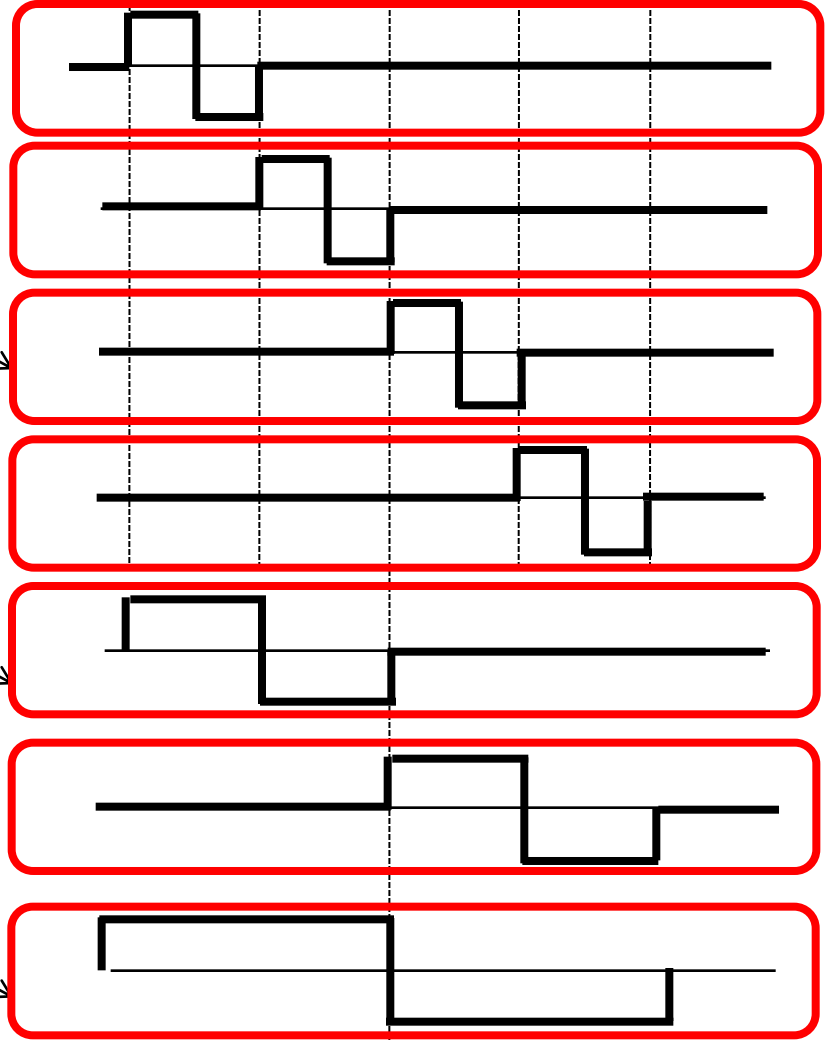
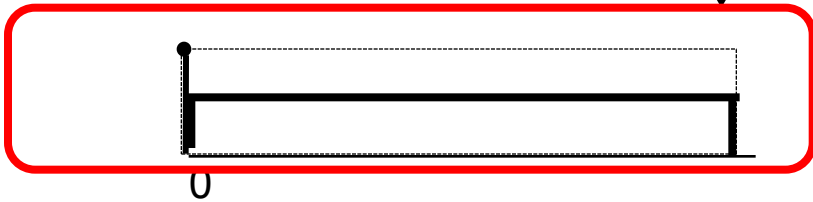
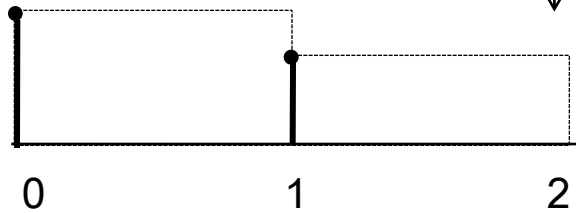
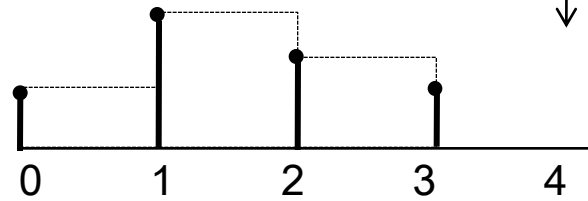
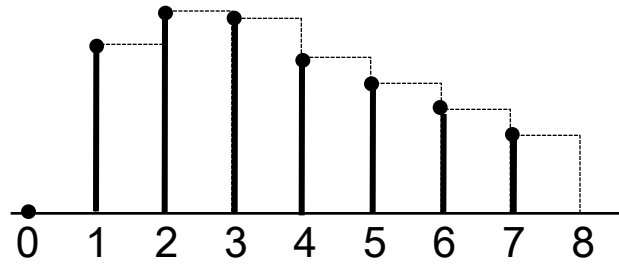
$$(\psi_k^{(j)}, \psi_{k'}^{(j)}) = \int_0^N \psi_k^{(j)}(x) \psi_{k'}^{(j)}(x) dx = 0, \\ k \neq k'$$

異なるレベル、異なる場所のウェーブレット同士も直交する。

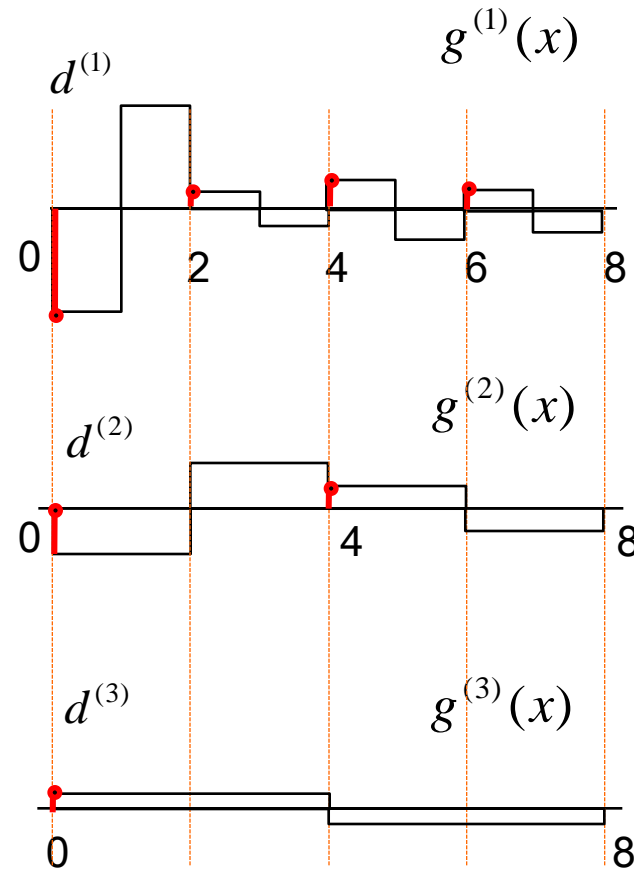
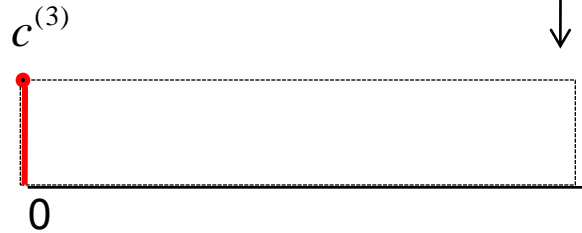
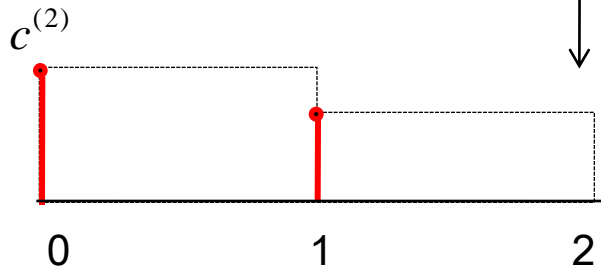
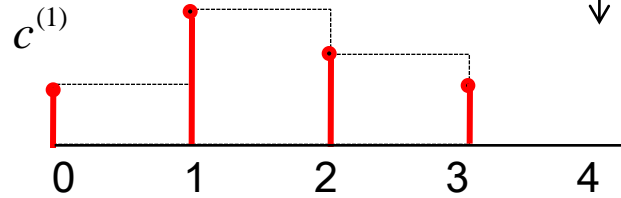
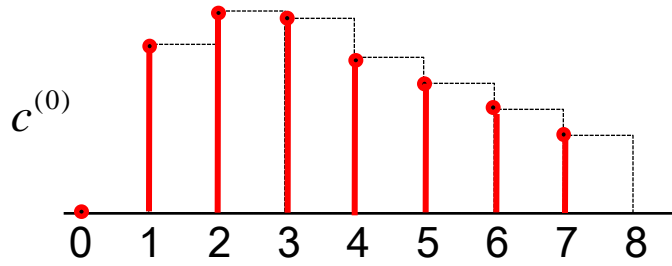
$$(\psi_k^{(j)}, \psi_{k'}^{(j')}) = \int_0^N \psi_k^{(j)}(x) \psi_{k'}^{(j')}(x) dx = 0, \\ k \neq k'$$



ウェーブレット変換：ウェーブレットの係数への変換



データ $c_k^{(0)}$ の多重解像度分解



ウェーブレット変換

スケーリング関数とウェーブレットの間には直交性がある。

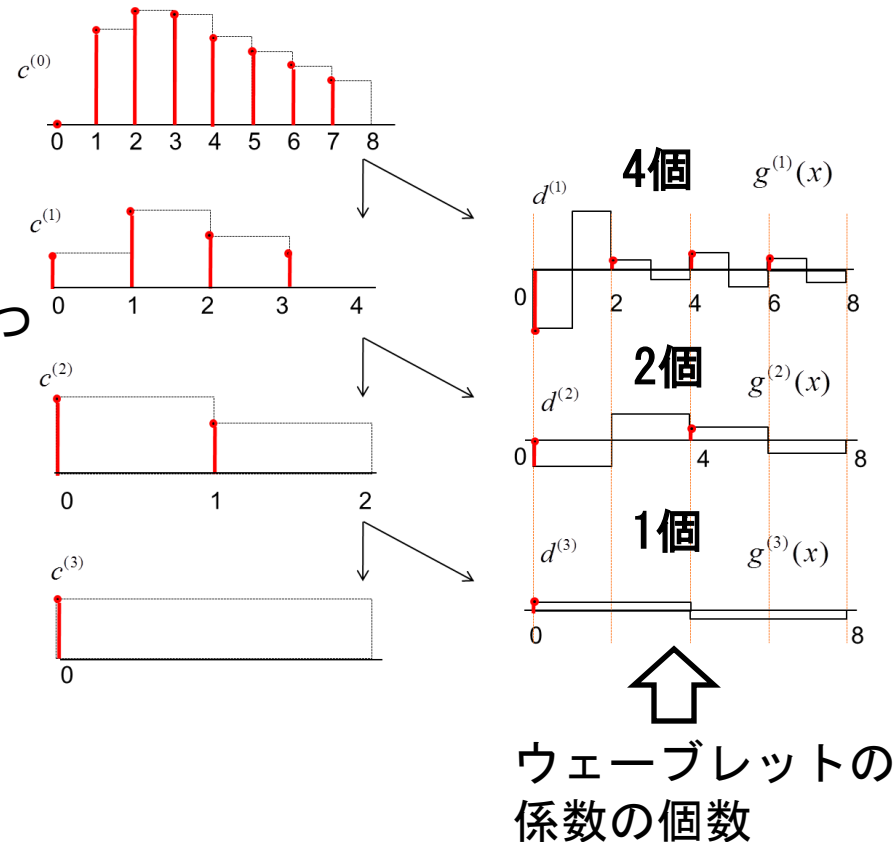
$$(\psi_k^{(j)}, \phi_{k'}^{(j)}) = \int_0^N \psi_k^{(j)}(x) \phi_{k'}^{(j)}(x) dx = 0$$

すべてレベルと場所のウェーブレットの間には直交性がある。

$$(\psi_k^{(j)}, \phi_{k'}^{(j')}) = \int_0^N \psi_k^{(j)}(x) \phi_{k'}^{(j')}(x) dx = 0$$

元のデータをすべてのウェーブレットと1つのスケーリング関数で表す場合、ウェーブレットの係数の個数は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \frac{N}{2^j} &= \frac{N}{2} + \frac{N}{4} + \dots + \frac{N}{2^n} \\ &= 2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 1 \\ &= 2^n - 1 \\ &= N - 1 \end{aligned}$$



ウェーブレット変換

$$f(x) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{N/2^j-1} d_k^{(j)} \psi_k^{(j)}(x) + c_0^{(n)}$$

すべてのウェーブレットの展開
整数であらされること。

ただし

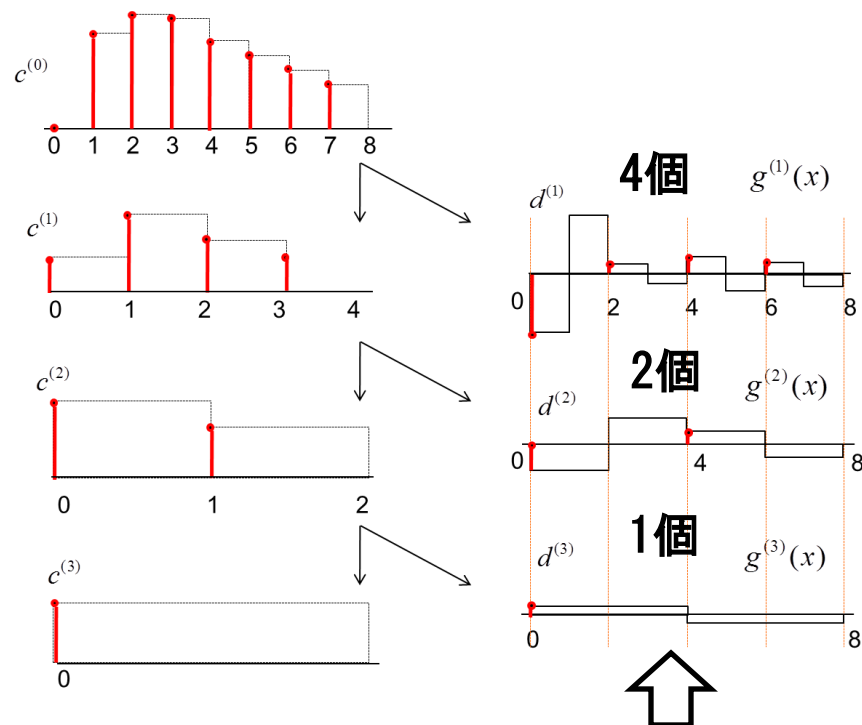
$$\|\psi_k^{(j)}\|^2 = \int_0^N \psi_k^{(j)}(x)^2 dx = \int_0^{2^j} dx = 2^j$$

$$\|\phi_0^{(n)}\|^2 = \int_0^N \phi_0^{(n)}(x)^2 dx = \int_0^N dx = N$$

逆に展開係数は以下のように計算される。

$$d_k^{(j)} = \frac{1}{2^j} \int_0^N f(x) \psi_k^{(j)}(x) dx$$

$$c_0^{(n)} = \frac{1}{N} \int_0^N f(x) dx$$



ウェーブレットの
係数の個数

下降サンプリングと上昇サンプリング

下降サンプリング

$$c_k^{(1)} = \frac{c_{2k}^{(0)} + c_{2k+1}^{(0)}}{2}, \quad d_k^{(1)} = \frac{c_{2k}^{(0)} - c_{2k+1}^{(0)}}{2}, \quad k = 0, \dots, \frac{N}{2} - 1$$



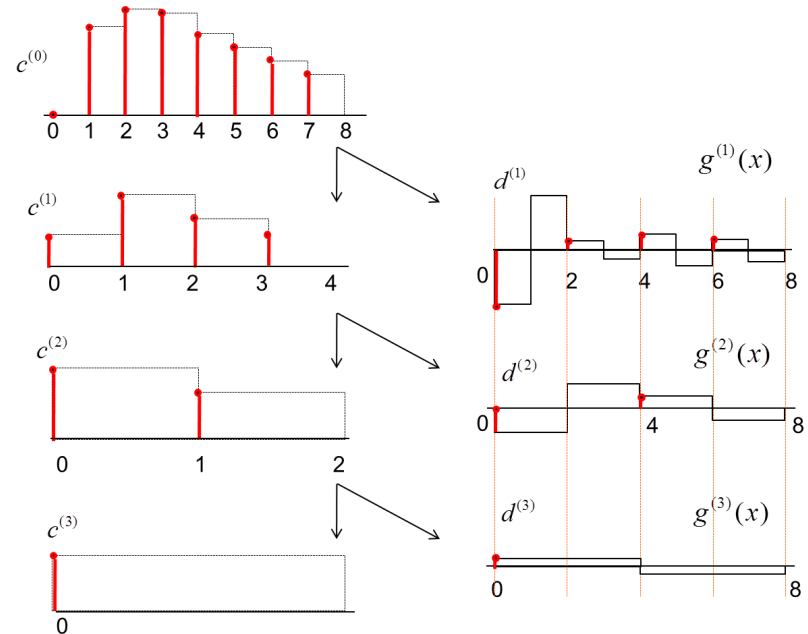
$$c_k^{(2)} = \frac{c_{2k}^{(1)} + c_{2k+1}^{(1)}}{2}, \quad d_k^{(2)} = \frac{c_{2k}^{(1)} - c_{2k+1}^{(1)}}{2}, \quad k = 0, \dots, \frac{N}{4} - 1$$



$$c_k^{(3)} = \frac{c_{2k}^{(2)} + c_{2k+1}^{(2)}}{2}, \quad d_k^{(3)} = \frac{c_{2k}^{(2)} - c_{2k+1}^{(2)}}{2}, \quad k = 0, \dots, \frac{N}{8} - 1$$



$$c_k^{(n)} = \frac{c_{2k}^{(n-1)} + c_{2k+1}^{(n-1)}}{2}, \quad d_k^{(n)} = \frac{c_{2k}^{(n-1)} - c_{2k+1}^{(n-1)}}{2}, \quad k = 0, \dots, \frac{N}{2^n} - 1$$



演算回数

$$c_k^{(j)} \text{ の数} : \sum_{j=1}^n \frac{N}{2^j} = \frac{N}{2} + \frac{N}{4} + \dots + \frac{N}{2^n} = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 1 = 2^n - 1 = N - 1$$

$$d_k^{(j)} \text{ の数} : N - 1$$

1つの値の計算に加減算が1回、除算が1回要るので、演算は合計4(N-1)回

下降サンプリングと上昇サンプリング

上昇サンプリング

$$c_{2k}^{(0)} = c_k^{(1)} + d_k^{(1)}, \quad c_{2k+1}^{(0)} = c_k^{(1)} - d_k^{(1)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1$$



$$c_{2k}^{(n-3)} = c_k^{(n-2)} + d_k^{(n-2)}, \quad c_{2k+1}^{(n-3)} = c_k^{(n-2)} - d_k^{(n-2)}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$



$$c_{2k}^{(n-2)} = c_k^{(n-1)} + d_k^{(n-1)}, \quad c_{2k+1}^{(n-2)} = c_k^{(n-1)} - d_k^{(n-1)}, \quad k = 0, 1$$

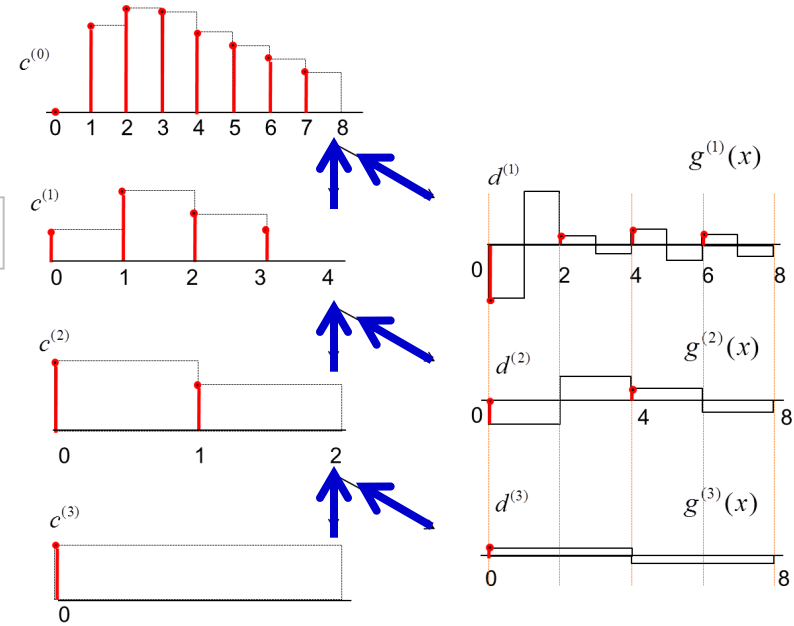


$$c_{2k}^{(n-1)} = c_k^{(n)} + d_k^{(n)}, \quad c_{2k+1}^{(n-1)} = c_k^{(n)} - d_k^{(n)}, \quad k = 0$$

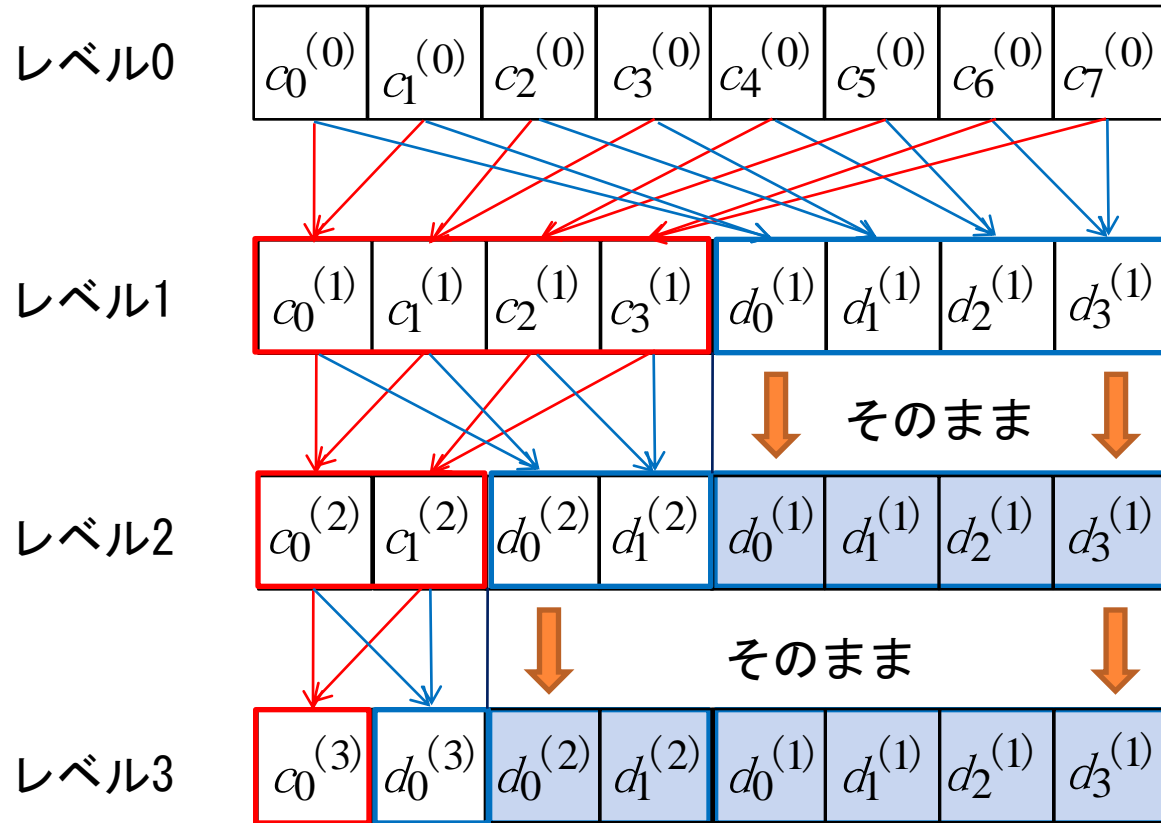
演算回数

$$c_k^{(j)} \text{ の数} : 2(N-1)$$

1つの値の計算に加減算が1回要るので、演算は合計 $2(N-1)$ 回



係数の計算過程と配列への保存 1次元



一般のウェーブレットの説明用数式素材

$$\phi\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k \phi(x-k)$$

$$c_k^{(j+1)} = \frac{1}{2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} g_{2k-l} c_l^{(j)}, \quad d_k^{(j+1)} = \frac{1}{2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_{2k-l} c_l^{(j)}, \quad j=0,1,2,\dots$$

$$p_0 = 1, \quad p_1 = 1$$

$$g_{-1} = 1, \quad g_0 = 1, \quad h_{-1} = -1, \quad h_0 = 1$$

$$\psi\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q_k \phi(x-k)$$

$$q_0 = 1, \quad q_1 = -1$$

$$c_k^{(j)} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (p_{k-2l} c_l^{(j+1)} + q_{k-2l} d_l^{(j+1)}), \quad j = \dots, 3, 2, 1, 0$$

$$f^{(j)}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^{(j)} \phi\left(\frac{x}{2^j} - k\right)$$

$$g^{(j)}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k^{(j)} \psi\left(\frac{x}{2^j} - k\right)$$