フーリエ変換

講義内容

- ■１次元フーリエ変換
  - ■ベクトル・関数の直交性
  - ■フーリエ級数
  - ■１次元フーリエ変換
  - ■代表的なフーリエ変換対
  - ■フーリエ変換の諸性質
  - ■コンボリューション（たたみこみ積分）
  - ■サンプリング定理
  - ■１次元離散フーリエ変換
- ■２次元フーリエ変換
  - ■空間周波数の概念
  - ■２次元フーリエ変換
  - ■代表的な２次元フーリエ変換対
  - ■２次元離散フーリエ変換

フーリエ変換

講義内容

- ■１次元フーリエ変換
  - ■ベクトル・関数の直交性
  - ■フーリエ級数
  - ■１次元フーリエ変換
  - ■代表的なフーリエ変換対
  - ■フーリエ変換の諸性質
  - ■コンボリューション（たたみこみ積分）
  - ■サンプリング定理
  - ■１次元離散フーリエ変換
- ■２次元フーリエ変換
  - ■空間周波数の概念
  - ■２次元フーリエ変換
  - ■代表的な２次元フーリエ変換対
  - ■２次元離散フーリエ変換

○ ベクトルの直交性

まず，２次元の場合．

$\mathbf{a}=[a_1 \quad a_2]^t, \mathbf{b}=[b_1 \quad b_2]^t$とする．ここで$(\cdot)^t$は転置を意味する．**a**と**b**の内積は

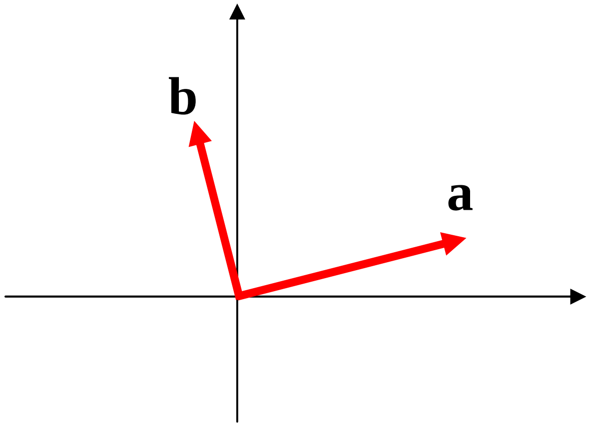
$$(\mathbf{a},\mathbf{b})=\mathbf{a}^t\mathbf{b}=[a_1 \quad a_2]\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}=a_1b_1+a_2b_2$$

と書ける．

aと**b**が直交であるとは，

$$(\mathbf{a},\mathbf{b})=\mathbf{a}^t\mathbf{b}=a_1b_1+a_2b_2=0$$

と同値である．



３次元の場合も同様にして，

$$\mathbf{a}=[a_1 \quad a_2 \quad a_3]^t, \mathbf{b}=[b_1 \quad b_2 \quad b_3]^t$$

に対して**a**，**b**が直交であるとは

$$(\mathbf{a},\mathbf{b})=\mathbf{a}^t\mathbf{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$$

と同値である．

一般に，ｎ次元ベクトル**a,b**が直交とは

$$(\mathbf{a},\mathbf{b})=\mathbf{a}^t\mathbf{b}=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=0$$

のことである．

○ 関数の直交性

いま，連続関数$f(x)$と$g(x)$を，
十分細かくサンプリングして，
ベクトルで以下のように表す．

$$\mathbf{f} = (f_1 \quad f_2 \quad \cdots \quad f_n)^t$$

$$\mathbf{g} = (g_1 \quad g_2 \quad \cdots \quad g_n)^t$$

２つのベクトルが直交しているなら，

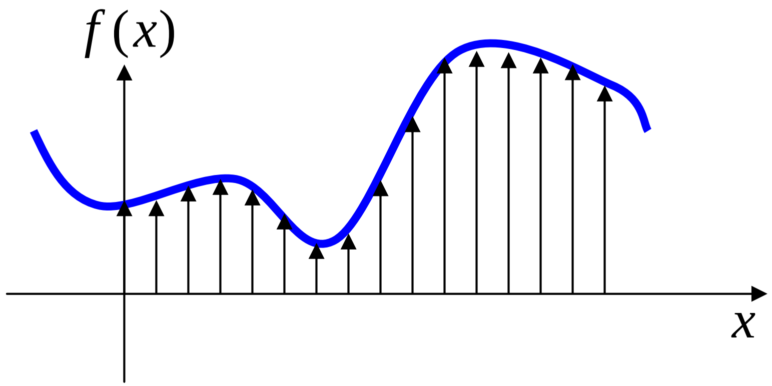
$$\mathbf{f}^t \mathbf{g} = 0$$

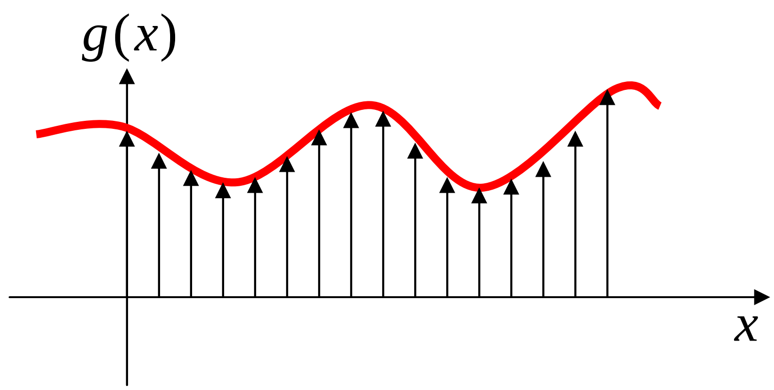
である．

サンプリング間隔を無限に細かくしていけば上式の総和は積分となり，直交なら

$$\int f(x)g(x)dx = 0$$

と書ける．





対応する値どうしを掛けて足す

○ 正規直交基底

<u>大きさが１</u>で，　<u>互いに直交</u>するベクトルの集合を正規直交基底とよぶ.
正規性(nomality)　直交性(orthogonality)

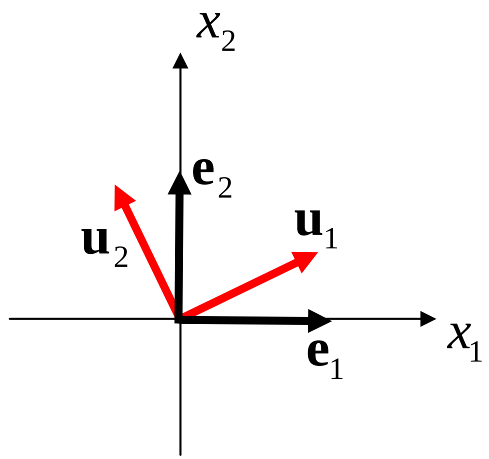
２つの基底ベクトルを

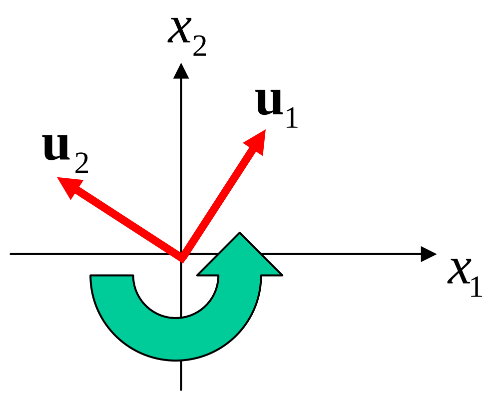
$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{bmatrix},\ \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} u_{21} \\ u_{22} \end{bmatrix}$$

としたとき，

$$(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = \mathbf{u}_i^t \mathbf{u}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \cdots i = j \\ 0 & \cdots i \neq j \end{cases}$$

δ_{ij}はクロネッカーのデルタ.



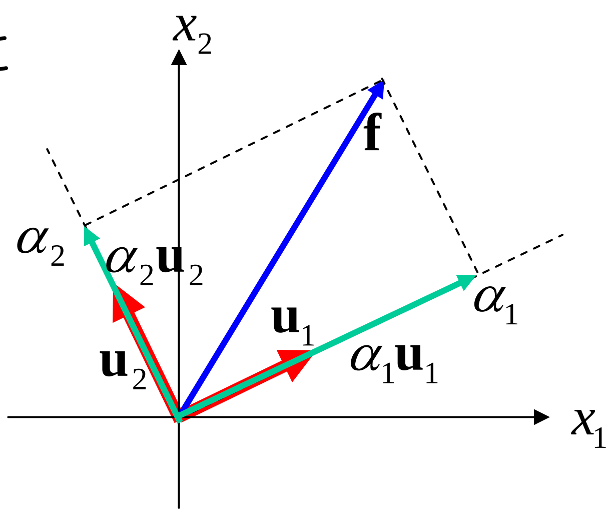


任意に回転した直交ベクトルは
すべて正規直交基底.

○ 正規直交基底

$\mathbf{f}$の正規直交基底での展開:

右図のとおり，ベクトル$\mathbf{f}$は$\mathbf{u}_1$に沿ったベクトルと$\mathbf{u}_2$に沿ったベクトルとの和で表すことができる.



$$\mathbf{f} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2$$

ここで，α_1は$\mathbf{f}$を$\mathbf{u}_1$に射影したときのベクトルの長さと方向を表すスカラーであり，$\mathbf{f}$と$\mathbf{u}_1$の内積で与えられる.

実際，上式の両辺と$\mathbf{u}_1$との内積をとると，

$$\begin{aligned}(\mathbf{f},\mathbf{u}_1) &= \mathbf{f}^t\mathbf{u}_1 = (\alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2)^t\mathbf{u}_1 \\ &= \alpha_1\mathbf{u}_1^t\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2^t\mathbf{u}_1 \\ &= \alpha_1 \qquad (\because \mathbf{u}\text{の正規直交性より})\end{aligned}$$

となる. 同様に$(\mathbf{f},\mathbf{u}_2) = \alpha_2$である.

以上のことは，ｎ次元空間に拡張しても成り立つ.

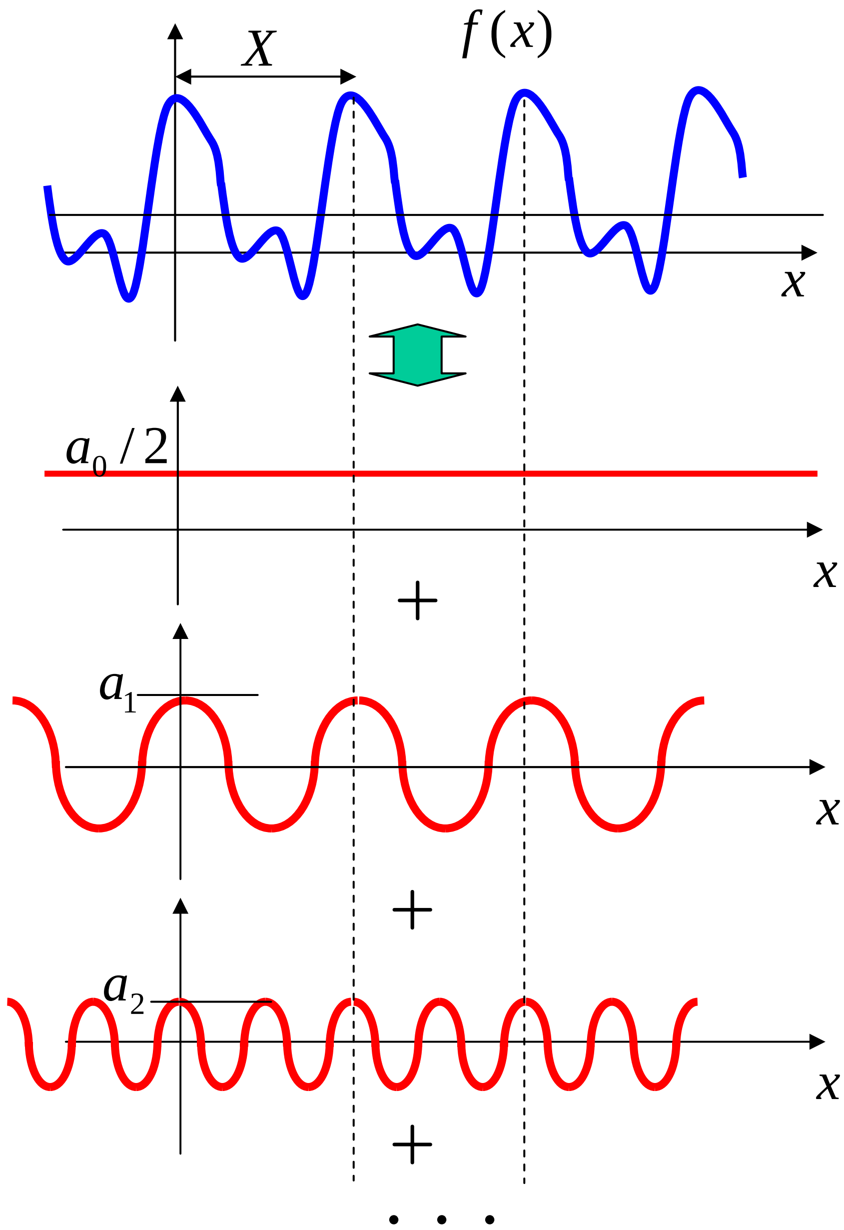
○ フーリエ級数

周期的な波形は，複数の周波数の
正弦波と余弦波の組み合わせで
表現することができる．この表現を
フーリエ級数展開といい，
次式で表される．

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos \omega x + a_2 \cos 2\omega x + \cdots$$
$$+ b_1 \sin \omega x + b_2 \sin 2\omega x + \cdots$$

ただし

$$\omega = \frac{2\pi}{X}$$



この展開における各係数（フーリエ係数と
呼ばれる）はどのように決まるだろうか．
これを調べる前に，まず三角関数の直交性を
調べてみる．

○ 三角関数の直交性

$$\text{for} \quad m = n \quad \int_0^X \cos n\omega x \cdot \cos m\omega x dx = \frac{X}{2} \quad \cdots(1)$$

$$\text{for} \quad m \neq n \quad \int_0^X \cos n\omega x \cdot \cos m\omega x dx = 0 \quad \cdots(2)$$

$$\text{for} \quad m = n \quad \int_0^X \sin n\omega x \cdot \sin m\omega x dx = \frac{X}{2} \quad \cdots(3)$$

$$\text{for} \quad m \neq n \quad \int_0^X \sin n\omega x \cdot \sin m\omega x dx = 0 \quad \cdots(4)$$

$$\text{for} \quad \text{arbitrary integer } m, n \quad \int_0^X \cos n\omega x \cdot \sin m\omega x dx = 0 \quad \cdots(5)$$

○ フーリエ係数

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos \omega x + a_2 \cos 2\omega x + \cdots + b_1 \sin \omega x + b_2 \sin 2\omega x + \cdots$$

この展開における各係数はどのように決まるだろうか．

試みに，両辺に$\cos n\omega x$をかけて，１周期にわたって積分してみる．

$$\int_0^X f(x)\cos n\omega x dx = \int_0^X \frac{1}{2}a_0 \cdot \cos n\omega x dx + \int_0^X a_1 \cos \omega x \cdot \cos n\omega x dx + \cdots$$

$$+ \int_0^X b_1 \sin \omega x \cdot \cos n\omega x dx + \int_0^X b_2 \sin 2\omega x \cdot \cos n\omega x dx + \cdots$$

$$= \int_0^X a_n \cos n\omega x \cdot \cos n\omega x dx$$ ← この項のみ残る

$$= \frac{X}{2}a_n$$

これより，

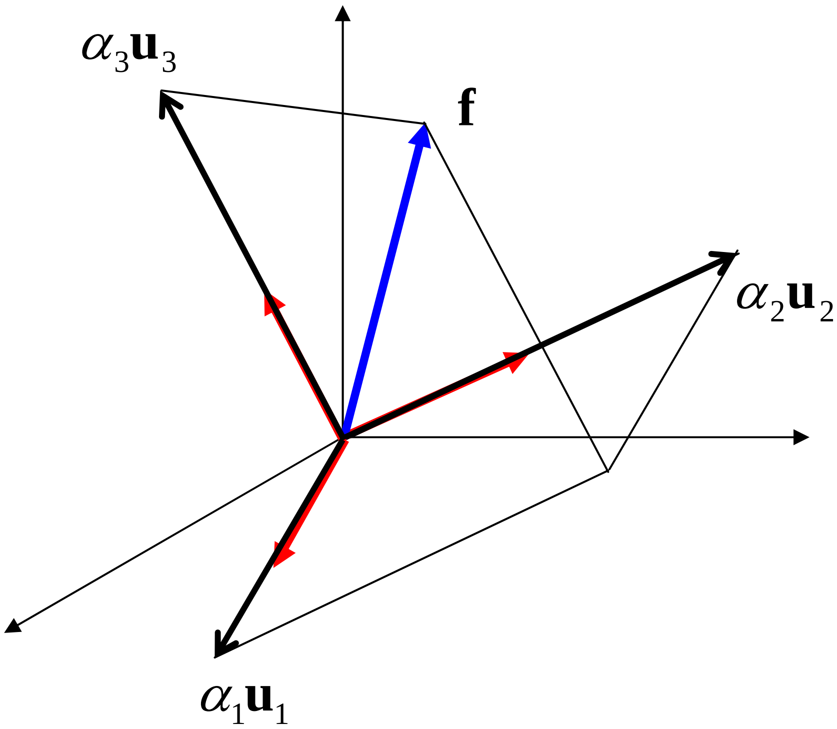
$$\boxed{a_n = \frac{2}{X}\int_0^X f(x)\cos n\omega x dx}$$

を得る．余弦波の項についても同様に計算して以下を得る．

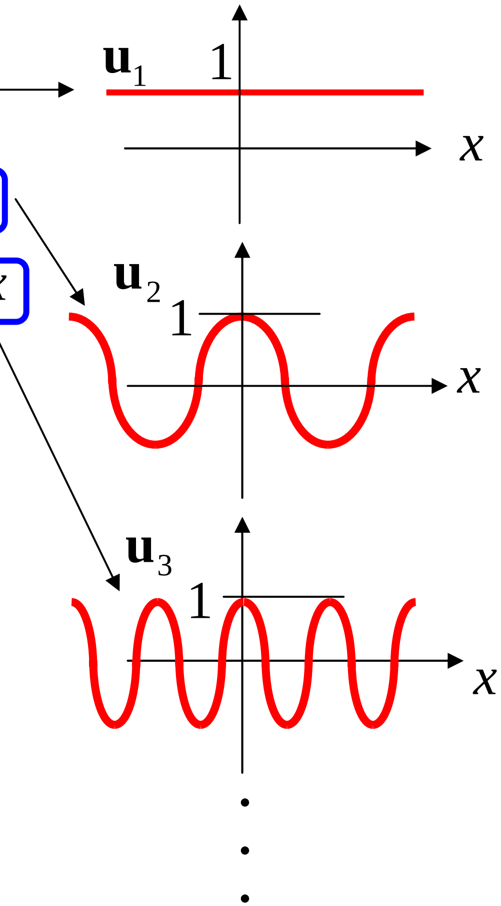
$$\boxed{b_n = \frac{2}{X}\int_0^X f(x)\sin n\omega x dx}$$

○ ベクトルの展開とフーリエ級数展開の類推

$$\mathbf{f} = \alpha_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \alpha_3 \cdot \mathbf{u}_3$$



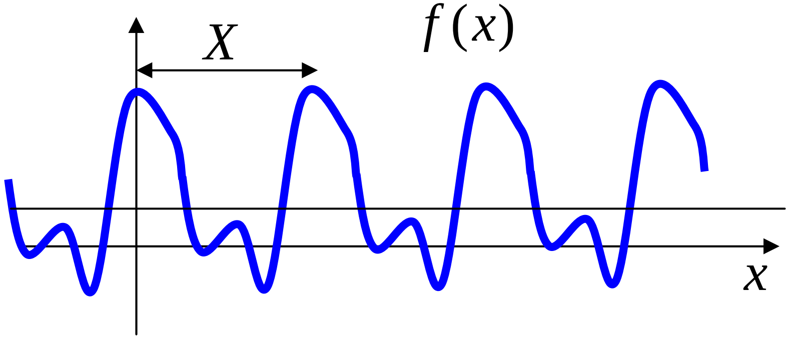
$$\begin{aligned} f(x) = & \ \frac{1}{2}a_0 \cdot 1 \\ & + a_1 \cdot \cos\omega x \\ & + a_2 \cdot \cos 2\omega x \\ & + \cdots \\ & + b_1 \cdot \sin\omega x \\ & + b_2 \cdot \sin 2\omega x \\ & + \cdots \end{aligned}$$



展開係数は，対応する基底ベクトル（基底関数）と信号 f との内積を計算することで得られる.

○ フーリエ級数・フーリエ変換

フーリエ級数のおさらい

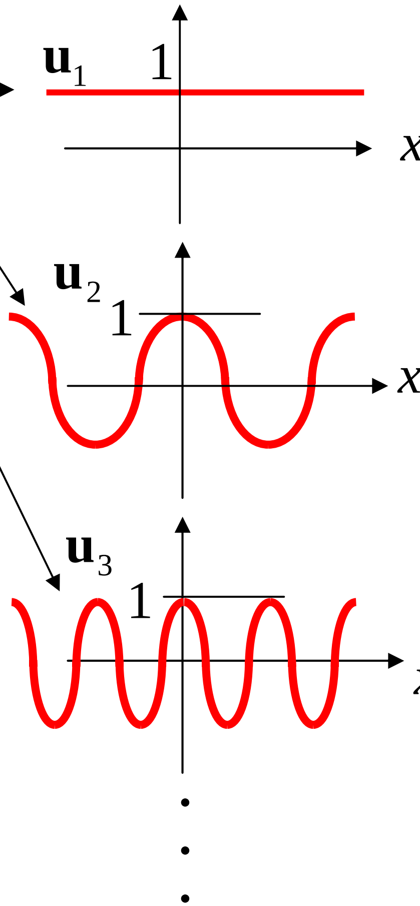


$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos \omega x + a_2 \cos 2\omega x + \cdots$$
$$+ b_1 \sin \omega x + b_2 \sin 2\omega x + \cdots$$

ただし

$$\omega = \frac{2\pi}{X}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 \cdot \boxed{1}$$
$$+ a_1 \cdot \boxed{\cos \omega x}$$
$$+ a_2 \cdot \boxed{\cos 2\omega x}$$
$$+ \cdots$$
$$+ b_1 \cdot \sin \omega x$$
$$+ b_2 \cdot \sin 2\omega x$$
$$+ \cdots$$



○ フーリエ級数の複素数表示

三角関数を用いたフーリエ級数展開を，複素数の指数関数を使って表すこともできる．

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+a_1\cos\omega x+a_2\cos 2\omega x+\cdots+b_1\sin\omega x+b_2\sin 2\omega x+\cdots$$

をオイラーの式を使って以下のように書き直す．

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+a_1\frac{e^{j\omega x}+e^{-j\omega x}}{2}+a_2\frac{e^{j2\omega x}+e^{-j2\omega x}}{2}+\cdots+b_1\frac{e^{j\omega x}-e^{-j\omega x}}{2j}+b_2\frac{e^{j2\omega x}-e^{-j2\omega x}}{2j}+\cdots$$

$$=\cdots+\frac{a_1+jb_1}{2}e^{-j\omega x}+\frac{1}{2}a_0+\frac{a_1-jb_1}{2}e^{j\omega x}+\frac{a_2-jb_2}{2}e^{j2\omega x}+\cdots$$

あらためて

$$c_0=\frac{a_0}{2},c_n=\frac{a_n-jb_n}{2},c_{-n}=\frac{a_n+jb_n}{2}=c_n^*$$

とおけば，以下のように指数関数による展開の形で表すことができる．

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\exp(j\omega nx)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\exp(j2\pi nx/X)$$

△

複素フーリエ級数の基底関数

$$\exp\left(j\frac{2\pi nx}{X}\right)=\cos\left(\frac{2\pi nx}{X}\right)+j\sin\left(\frac{2\pi nx}{X}\right),\quad n=-\infty,\ldots,-1,0,1,\ldots,\infty$$

・・・

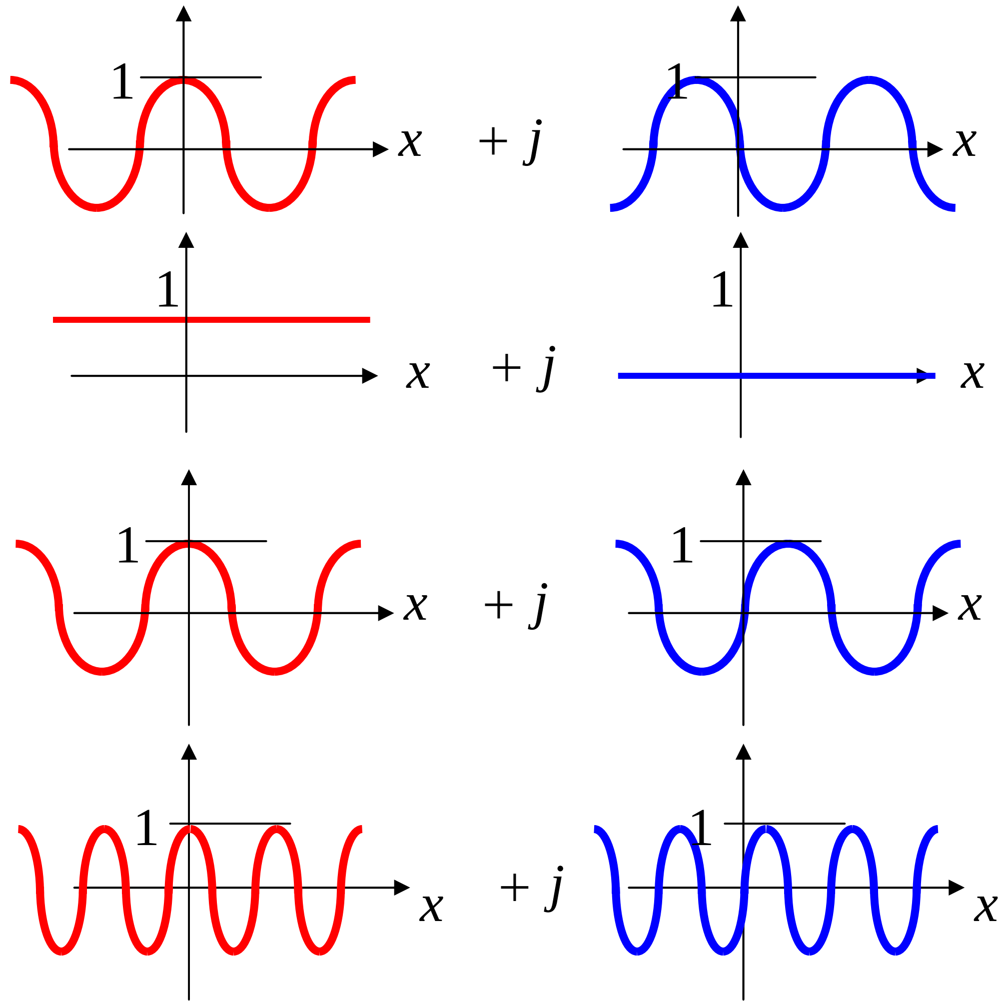
$$\cos\left(\frac{2\pi 1x}{X}\right)-j\sin\left(\frac{2\pi 1x}{X}\right)$$

$$\cos\left(\frac{2\pi 0x}{X}\right)+j\sin\left(\frac{2\pi 0x}{X}\right)$$

$$\cos\left(\frac{2\pi 1x}{X}\right)+j\sin\left(\frac{2\pi 1x}{X}\right)$$

$$\cos\left(\frac{2\pi 2x}{X}\right)+j\sin\left(\frac{2\pi 2x}{X}\right)$$

・・・



△
複素フーリエ級数展開と係数

級数展開： $$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\exp(j2\pi nx/X)$$

展開係数： $$c_n=\frac{1}{X}\int_{-X/2}^{X/2}f(x)\exp(-j2\pi nx/X)dx$$

展開係数の導出：

$$\begin{aligned}\frac{1}{X}\int_{-X/2}^{X/2}f(x)\exp(-j2\pi mx/X)dx&=\frac{1}{X}\int_{-X/2}^{X/2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\exp(j2\pi nx/X)\exp(-j2\pi mx/X)dx\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\frac{1}{X}\int_{-X/2}^{X/2}\exp(j2\pi nx/X)\exp(-j2\pi mx/X)dx\\&=c_m\end{aligned}$$

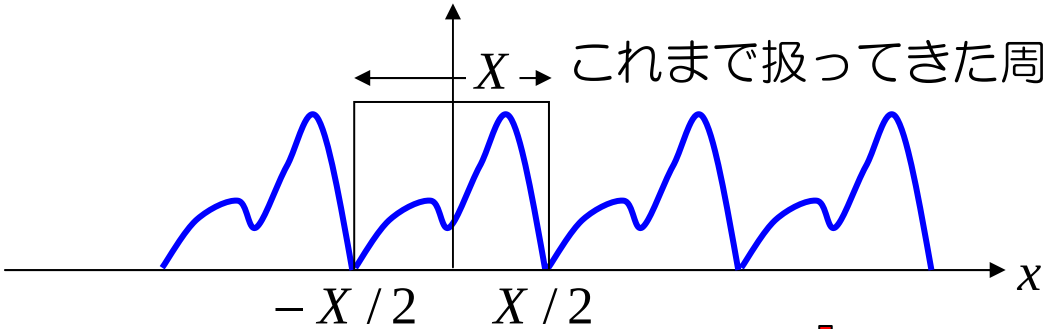
$$\exp\left(j\frac{2\pi nx}{X}\right),\quad n=-\infty,\ldots,-1,0,1,\ldots,\infty$$

の正規直交性を利用した。

△ 周期関数から非周期関数への拡張

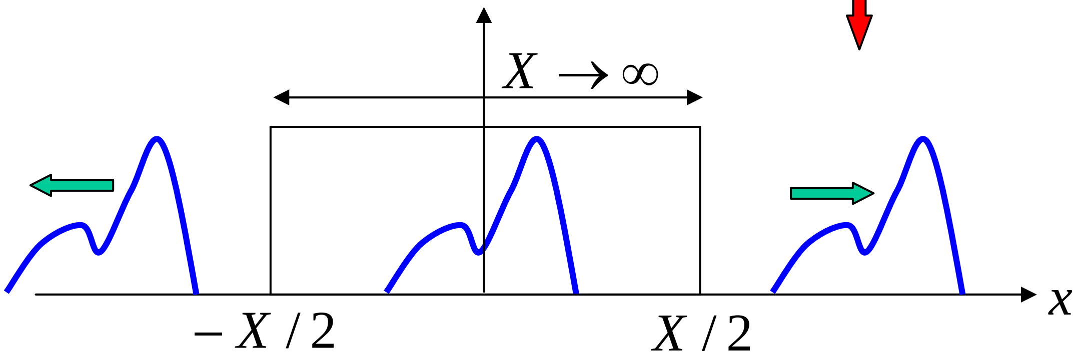
級数展開： $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(j2\pi nx / X) \quad \cdots(1)$

展開係数： $c_n = \frac{1}{X}\int_{-X/2}^{X/2} f(x)\exp(-j2\pi nx / X)dx \cdots(2)$



これまで扱ってきた周期関数

周期関数の非周期関数への拡張



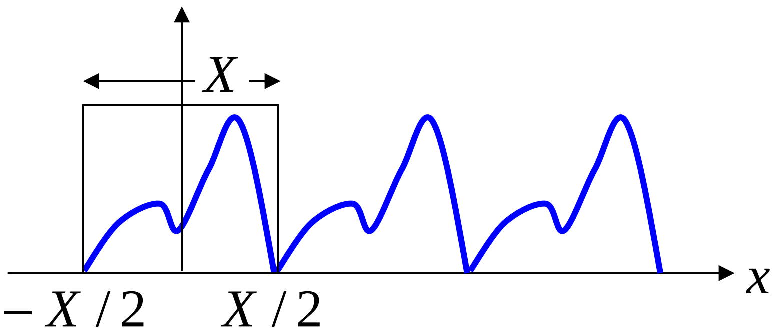
非周期関数を，無限に大きな周期をもつ周期関数と解釈する．

$$X \rightarrow \infty$$

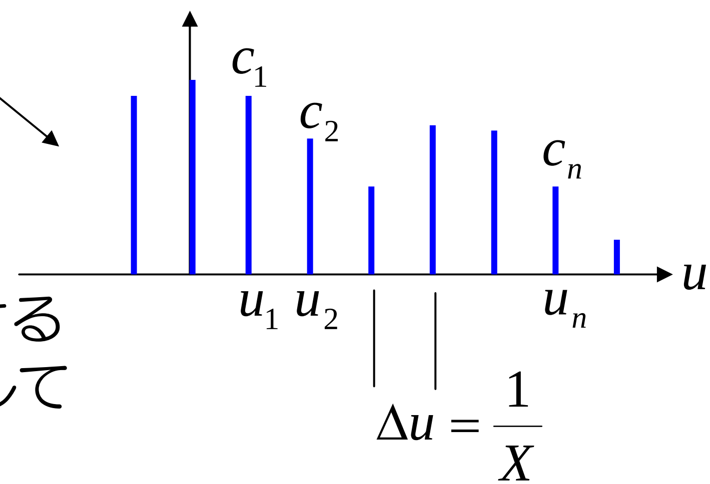
△ フーリエ級数からフーリエ変換へ（１）

フーリエ展開係数に関する修正：

$$c_n = \frac{1}{X}\int_{-X/2}^{X/2} f(x)\exp(-j2\pi nx/X)dx \cdots (2)$$



いま，xの逆数をuと書き，周波数と定義する．
周期Xの周期関数は，基本周波数$\Delta u = 1/X$の
整数倍の周波数にスペクトルのパワーをもつ．



$$u_n = n \cdot \Delta u = \frac{n}{X} \cdots (3)$$

c_nはnに関する関数であり，周波数$u = u_n$における
関数である．いま，周波数u_nにおける係数として
$F(u_n) = X \cdot c_n$
を定義すると，式(1)より，

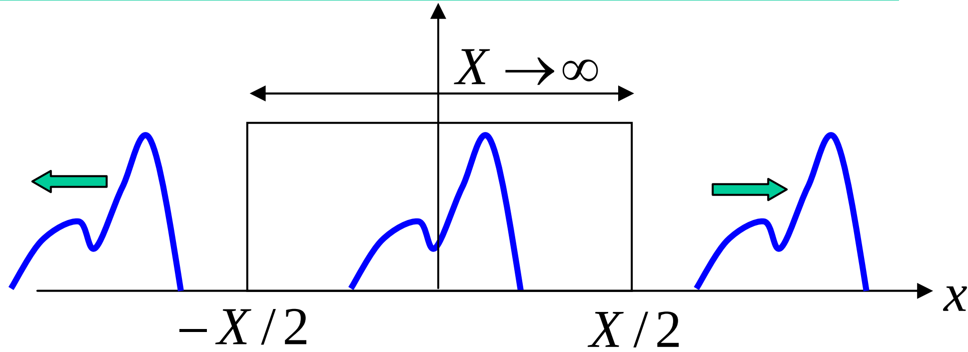
$$F(u_n) = \int_{-X/2}^{X/2} f(x)\exp(-j2\pi \cdot n \cdot x/X)dx$$
$$= \int_{-X/2}^{X/2} f(x)\exp(-j2\pi \cdot u_n x)dx \cdots (4)$$

と書ける．

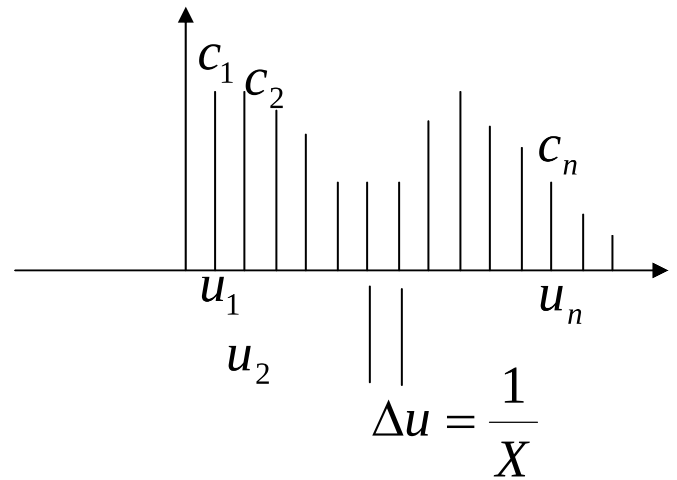
△ フーリエ級数からフーリエ変換へ（2）

フーリエ展開係数に関する修正：

$$c_n = \frac{1}{X}\int_{-X/2}^{X/2} f(x)\exp(-j2\pi nx/X)dx \cdots (2)$$



周期Xを限りなく大きくしていくと
$(X \to \infty)$
スペクトルの間隔は限りなく小さくなっていく.
$(\Delta u \to 0)$



Xを広げていけば
スペクトルの間隔は
密になっていく.

このとき，どんな周波数uでも値をもつことになり，フーリエ係数の式

$$F(u_n) = \int_{-X/2}^{X/2} f(x)\exp(-j2\pi \cdot \underline{u_n} x)dx \cdots (4)$$

離散的

は,

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-j2\pi \cdot \underline{u} \cdot x)dx \cdots (5)$$

連続的

と修正される.

△ フーリエ級数からフーリエ変換へ（３）

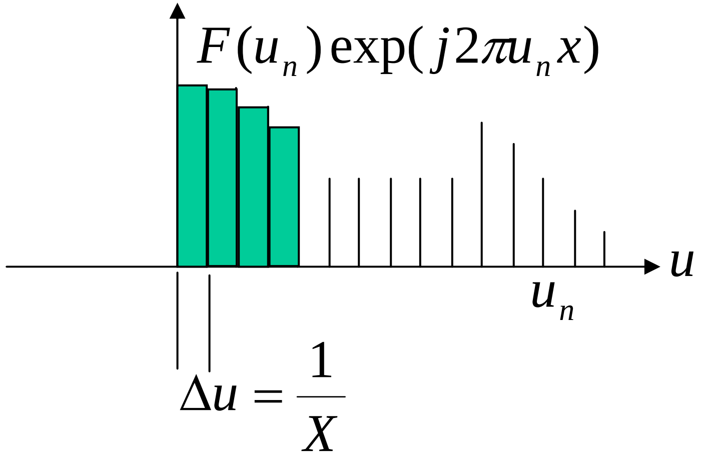
フーリエ級数展開に関する修正：

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(j2\pi nx/X) \cdots (1)$$

フーリエ級数展開に式を以下のように書き直す.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(j2\pi \cdot nx/X) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} F(u_n) \exp(j2\pi \cdot u_n x) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta u \cdot F(u_n) \exp(j2\pi \cdot u_n x) \cdots (6) \end{aligned}$$

注意：
縦軸の値は複素数なので
本来はこのような表示は
不適当.



ここで，周期を無限大にもっていく.
$X \to \infty$　すなわち，$\Delta u \to 0$
このとき，フーリエ級数展開は，
右のように積分形に修正される.

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{\Delta u \to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta u \cdot F(u_n) \exp(j2\pi \cdot u_n x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \exp(j2\pi \cdot ux) du \qquad \cdots (7) \end{aligned}$$

↑フーリエ変換の式

◎ Fourier変換の整理と意味合い

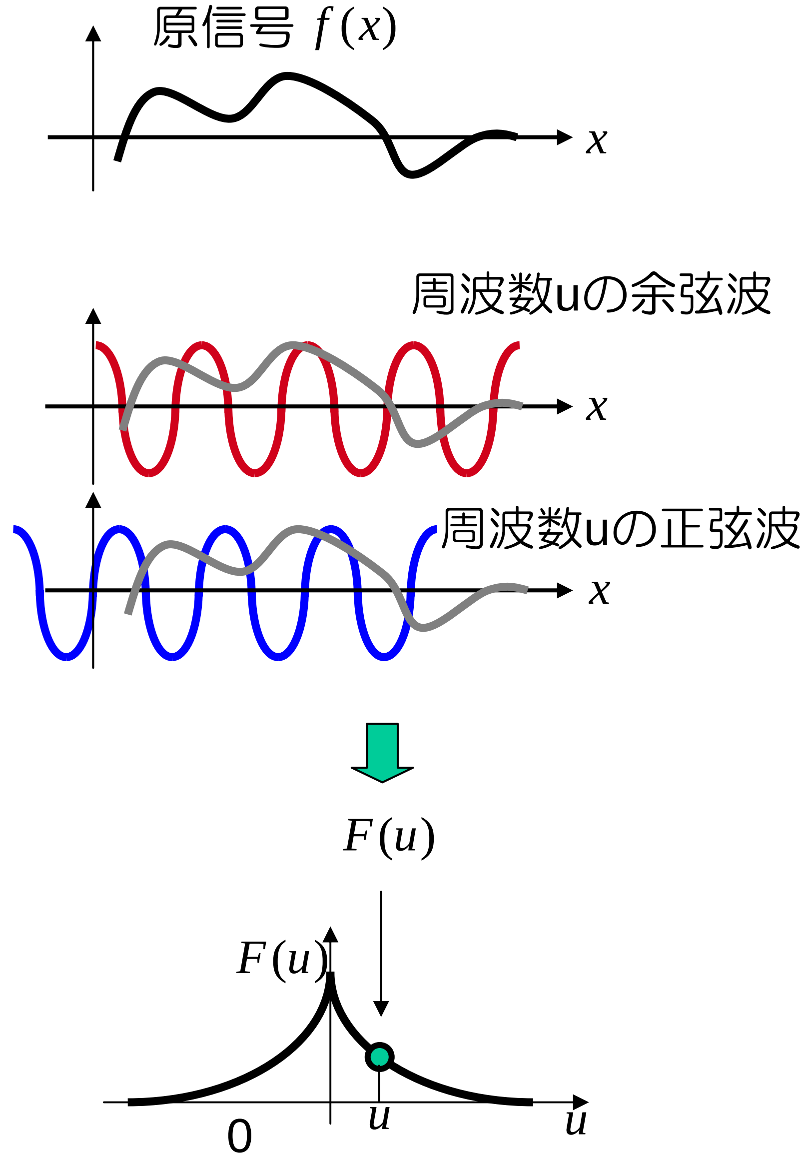
フーリエ変換（フーリエ積分）

$$F(u) = \Im\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-j2\pi ux)dx$$

フーリエ逆変換

$$f(x) = \Im^{-1}\{F(u)\} = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)\exp(j2\pi ux)du$$

$\Im\{\cdot\}$ ：フーリエ変換の演算を意味する記号とする



フーリエ変換の意味合い（模式図）：

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)[\cos(2\pi ux) - j\sin(2\pi ux)]dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(2\pi ux)dx$$

$$- j\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(2\pi ux)dx$$

フーリエ変換

講義内容

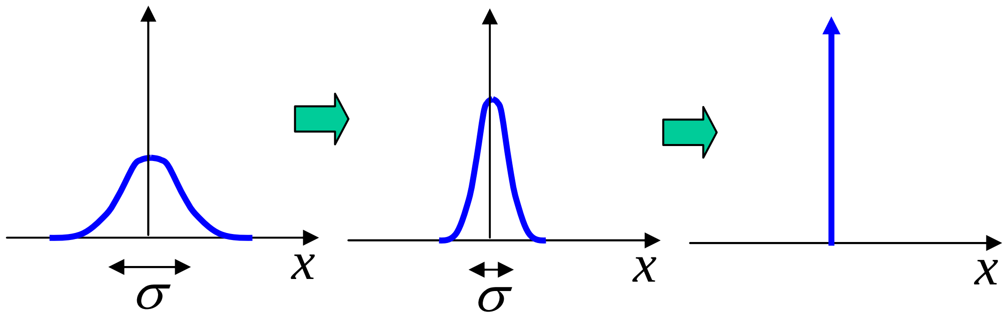
- １次元フーリエ変換
  - ベクトル・関数の直交性
  - フーリエ級数
  - １次元フーリエ変換
  - 代表的なフーリエ変換対
  - フーリエ変換の諸性質
  - コンボリューション（たたみこみ積分）
  - サンプリング定理
  - １次元離散フーリエ変換
- ２次元フーリエ変換
  - 空間周波数の概念
  - ２次元フーリエ変換
  - 代表的な２次元フーリエ変換対
  - ２次元離散フーリエ変換

デルタ関数

ディラックのデルタ関数（Dirac delta function） ⟺ 全積分は１で，原点で無限大の大きさをもつ関数.

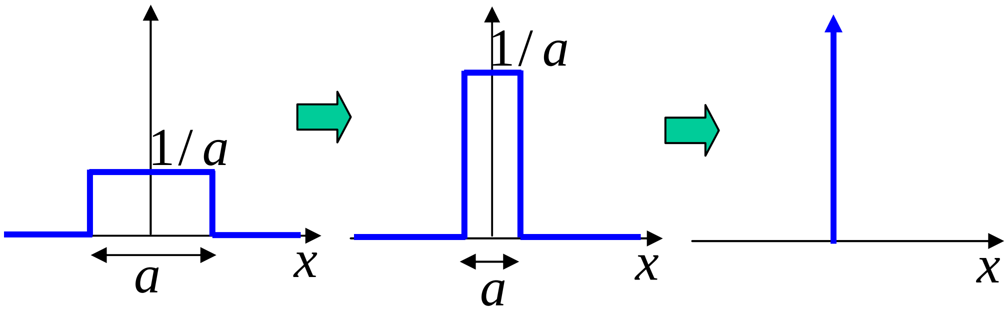
例１）ガウス関数の極限

$$\delta(x) = \lim_{\sigma \to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2} \right)$$



例２）矩形関数(rect関数）の極限

$$\delta(x) = \lim_{a \to 0} \frac{1}{a} \cdot rect\left(\frac{x}{a} \right)$$

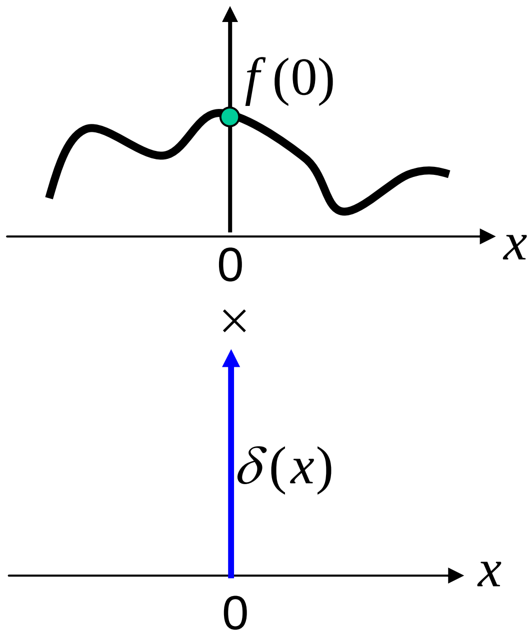


デルタ関数は超関数と呼ばれ，厳密な意味での関数ではない.
しかし，システムのインパルスを表すのに便利であり，頻繁に用いられる.

○ デルタ関数（つづき）

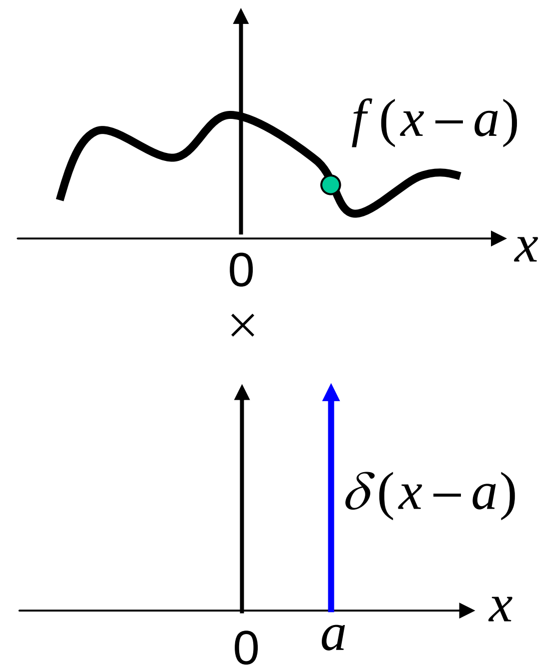
デルタ関数の性質

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0)$$



応用

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a)$$



デルタ関数$\delta(x)$を掛けて積分することは$x=0$での関数値を抽出（サンプリング）する効果がある.

原点からaだけずれた点でサンプリングする場合の表現

○ 代表的なフーリエ変換対

$$\delta(x) \Leftrightarrow 1$$

$$\mathrm{rect}(x) \Leftrightarrow \mathrm{sinc}(u) = \frac{\sin(\pi u)}{\pi u}$$

$$\exp(-\pi x^2) \Leftrightarrow \exp(-\pi u^2)$$

$$\cos(2\pi u_0 x) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\{\delta(u-u_0)+\delta(u+u_0)\}$$

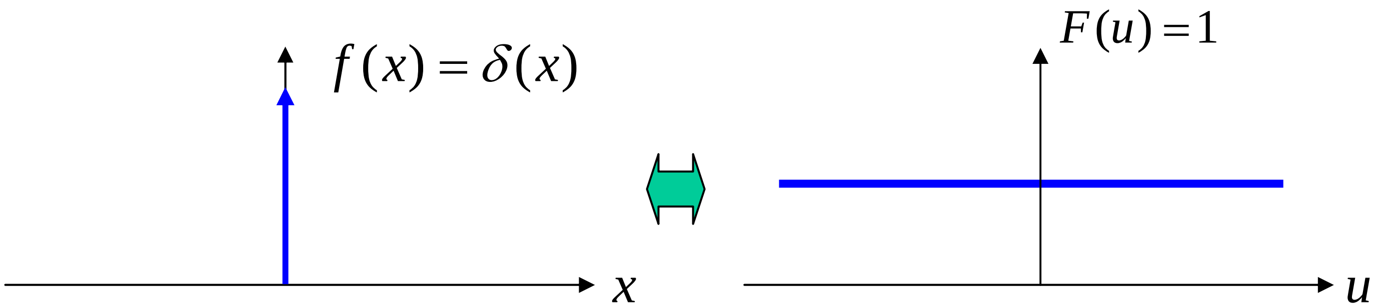
$$\mathrm{comb}(x/d) \Leftrightarrow \mathrm{comb}(du)$$

ただし $\mathrm{comb}(x/d) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-nd)$

○ 代表的なフーリエ変換対I

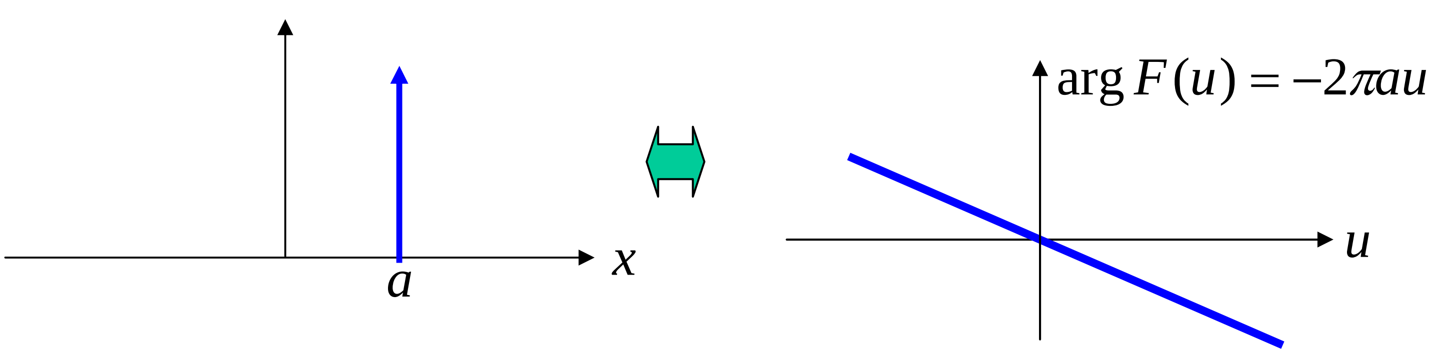
$$f(x)=\delta(x)\Leftrightarrow F(u)=1$$

$$\Im\{\delta(x)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\exp(-j2\pi ux)dx$$
$$=\exp(-j2\pi u0)=1$$



$$F(u)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-a)\exp(-j2\pi ux)dx$$
$$=\exp(-j2\pi au)$$

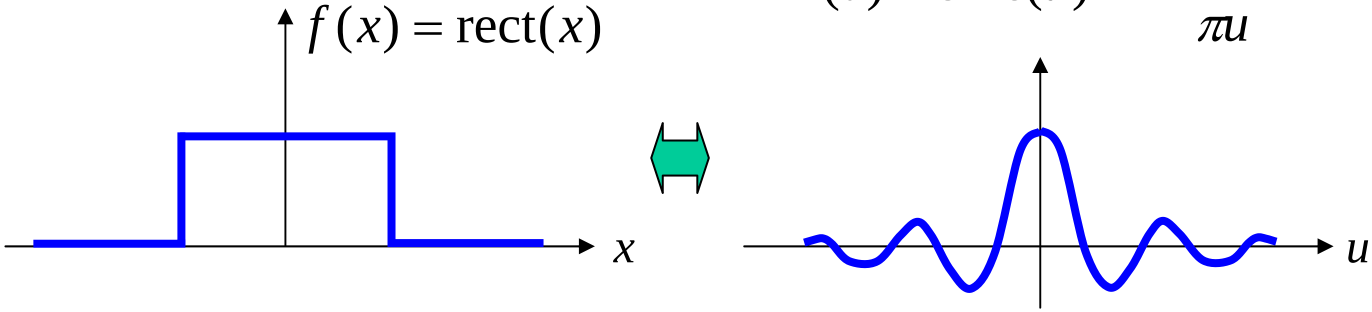
$$f(x)=\delta(x-a)$$



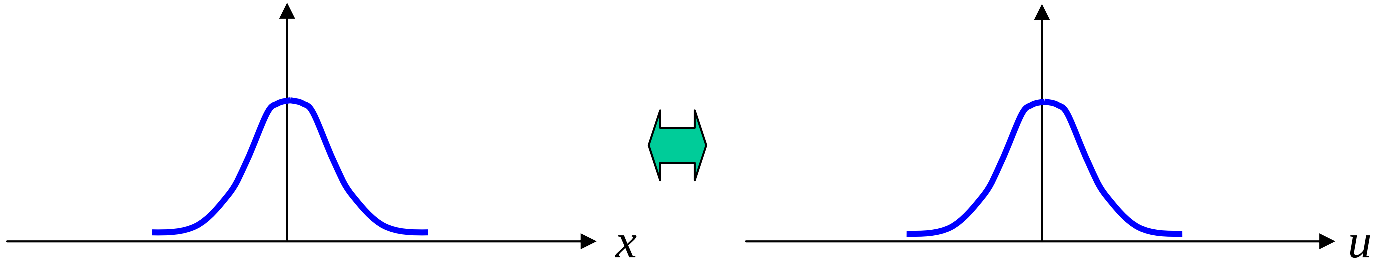
○ 代表的なフーリエ変換対II

$$f(x)=\mathrm{rect}(x) \Leftrightarrow F(u)=\mathrm{sinc}(u)=\frac{\sin(\pi u)}{\pi u}$$

$$f(x)=\mathrm{rect}(x) \qquad F(\mathrm{u})=\mathrm{sinc}(u)=\frac{\sin(\pi u)}{\pi u}$$



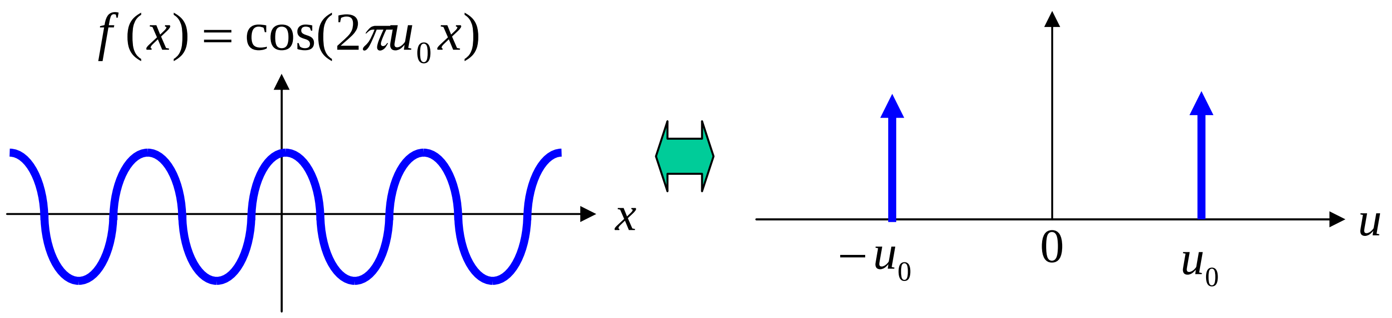
$$f(x)=\exp(-\pi x^2) \qquad f(u)=\exp(-\pi u^2)$$



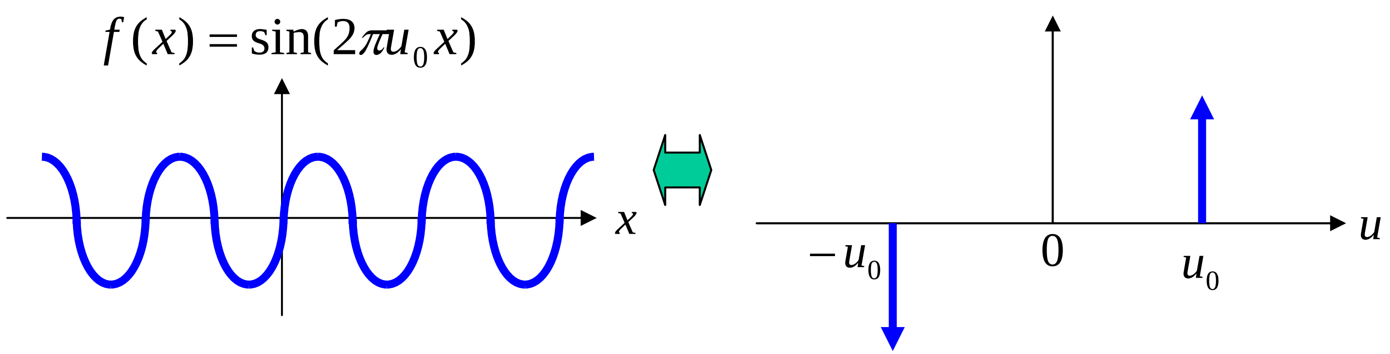
ガウス関数のフーリエ変換はやはりガウス関数

○ 代表的なフーリエ変換対III

$$f(x)=\cos(2\pi u_0 x) \Leftrightarrow F(u)=\frac{1}{2}\{\delta(u-u_0)+\delta(u+u_0)\}$$



$$f(x)=\sin(2\pi u_0 x) \Leftrightarrow F(u)=\frac{1}{2}\{\delta(u-u_0)-\delta(u+u_0)\}$$

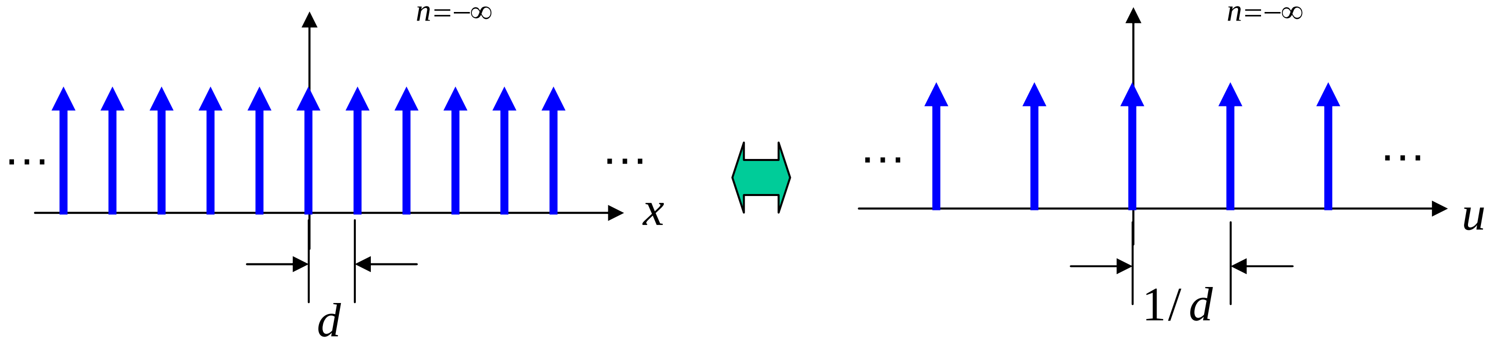


○ 代表的なフーリエ変換対IV

$$f(x) = \mathrm{comb}(x/d) \Leftrightarrow F(u) = \mathrm{comb}(du)$$

$$\text{where } \mathrm{comb}(x/d) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nd)$$

$$f(x) = \mathrm{comb}(x/d) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nd) \qquad F(u) = \mathrm{comb}(du) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(u - n/d)$$



$$\cdots \delta(x+d) + \delta(x) + \delta(x-d) + \delta(x-2d) + \cdots$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nd)$$

フーリエ変換

講義内容

- 1次元フーリエ変換
  - ベクトル・関数の直交性
  - フーリエ級数
  - 1次元フーリエ変換
  - 代表的なフーリエ変換対
  - フーリエ変換の諸性質
  - コンボリューション（たたみこみ積分）
  - サンプリング定理
  - 1次元離散フーリエ変換
- 2次元フーリエ変換
  - 空間周波数の概念
  - 2次元フーリエ変換
  - 代表的な2次元フーリエ変換対
  - 2次元離散フーリエ変換

○ フーリエ変換の諸性質

線形性(linearity theorem)

線形性＝重ね合わせの理が成り立つこと.

$$\Im\{a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)\} = a_1\Im\{f_1(x)\} + a_2\Im\{f_2(x)\}$$

対称性

関数$f(x)$が実関数なら,
$F(u)$はエルミート性をもつ.

$$F(-u) = F^*(u) \Rightarrow |F(-u)| = |F(u)|$$

相似則(similarity theorem)

$$\Im\{f(x/a)\} = |a|F(au)$$

シフト則(shifting theorem)

$$\Im\{f(x-a)\} = \exp(-j2\pi au)F(u)$$

微分のフーリエ変換

$$F\left\{\frac{d^n}{dx^n} f(x)\right\} = (j2\pi u)^n F(u)$$

$$F\left\{\frac{d}{dx} f(x)\right\} = (j2\pi u)F(u)$$

$$F\left\{\frac{d^2}{dx^2} f(x)\right\} = (j2\pi u)^2 F(u) = -4\pi^2 u^2 F(u)$$

コンボリューション定理

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x-\tau) f(\tau) d\tau = h(x) * f(x)$$

実空間でのコンボリューション

$$\Updownarrow$$

$$G(u) = F(u)H(u)$$

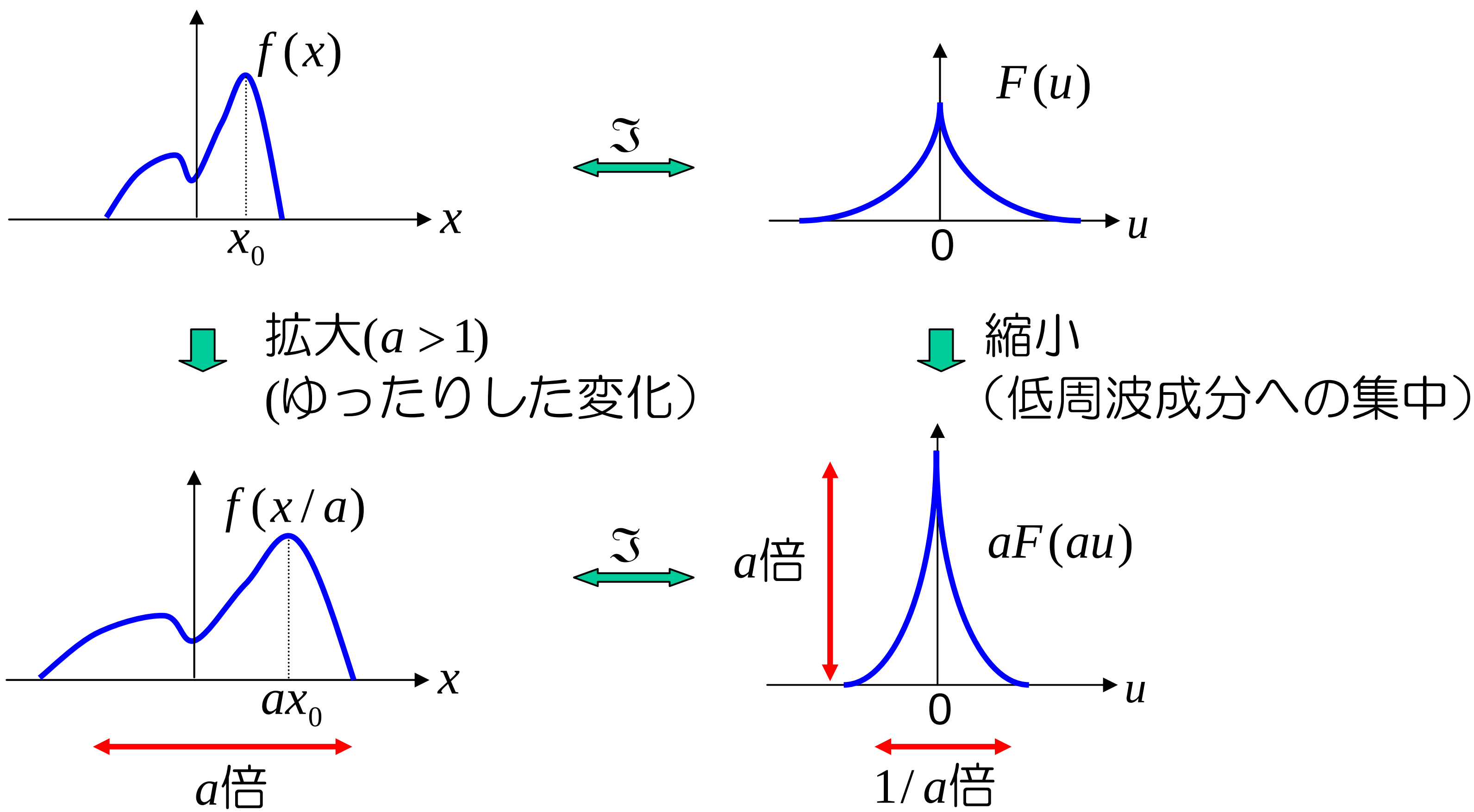
フーリエ空間での積

△

相似則

相似則(similarity theorem)：

$$\Im\{f(x/a)\} = |a|F(au)$$

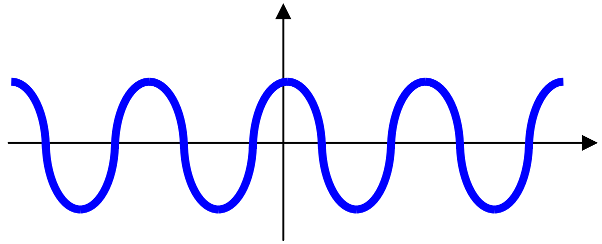


△

相似則の具体例

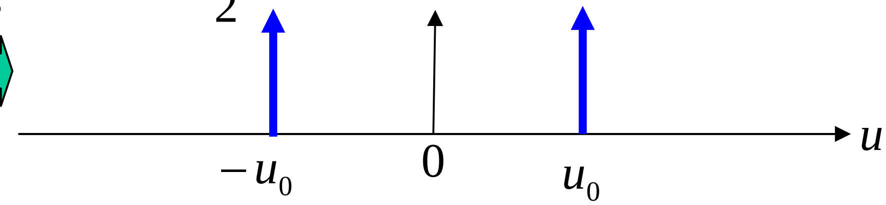
余弦波

$$f(x)=\cos(2\pi u_0 x)$$

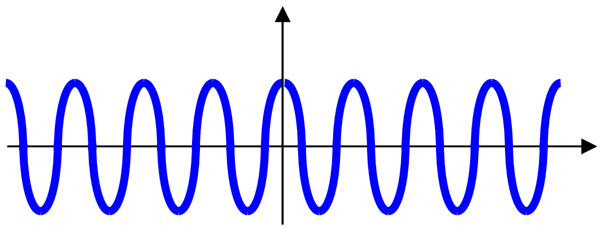


$$\overset{\Im}{\Longleftrightarrow}$$

$$F(u)=\frac{1}{2}\{\delta(u-u_0)+\delta(u+u_0)\}$$

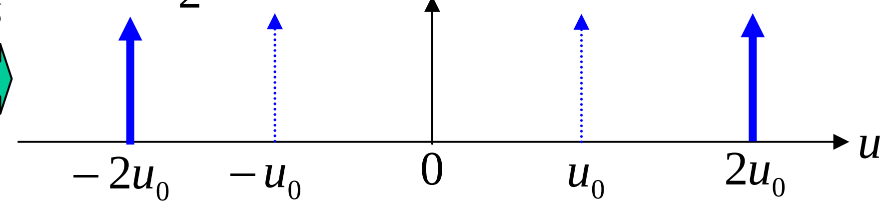


$$f(x)=\cos(2\pi 2u_0 x)$$



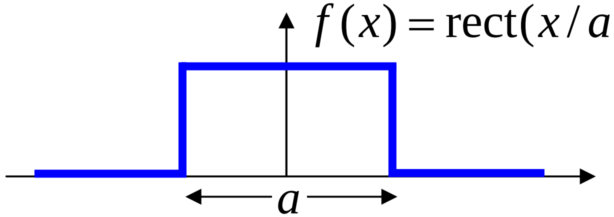
$$\overset{\Im}{\Longleftrightarrow}$$

$$F(u)=\frac{1}{2}\{\delta(u-2u_0)+\delta(u+2u_0)\}$$

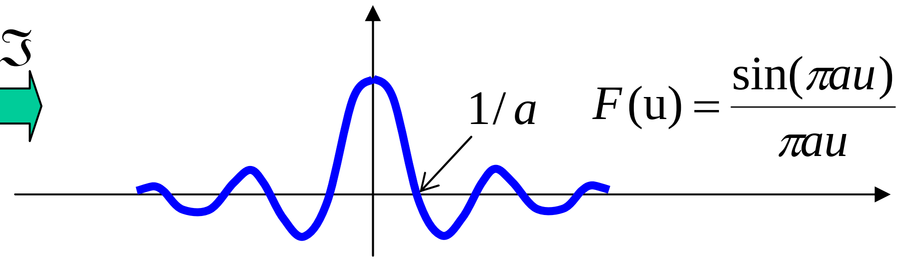


矩形波

$$f(x)=\mathrm{rect}(x/a)$$

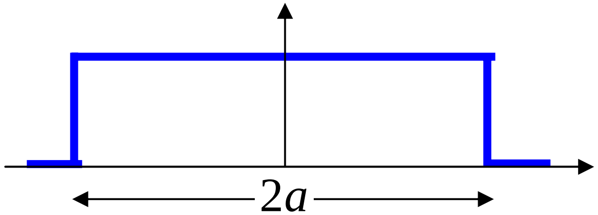


$$\overset{\Im}{\Longleftrightarrow}$$

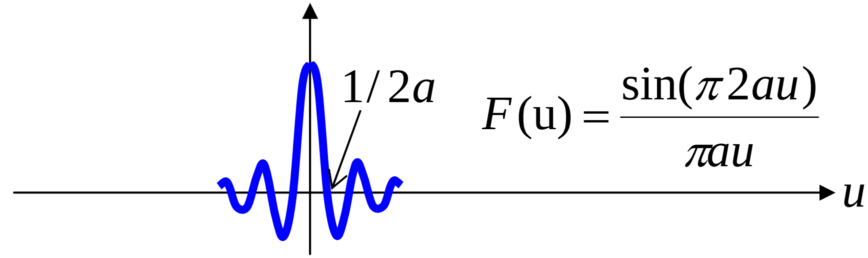


$$F(\mathrm{u})=\frac{\sin(\pi a u)}{\pi a u}$$

$$f(x)=\mathrm{rect}(x/2a)$$



$$\overset{\Im}{\Longleftrightarrow}$$



$$F(\mathrm{u})=\frac{\sin(\pi 2 a u)}{\pi a u}$$

△

シフト則

波形の平行移動：

$$\Im\{f(x-a)\}=\underline{\exp(-j2\pi au)}F(u)$$

線形位相

証明：

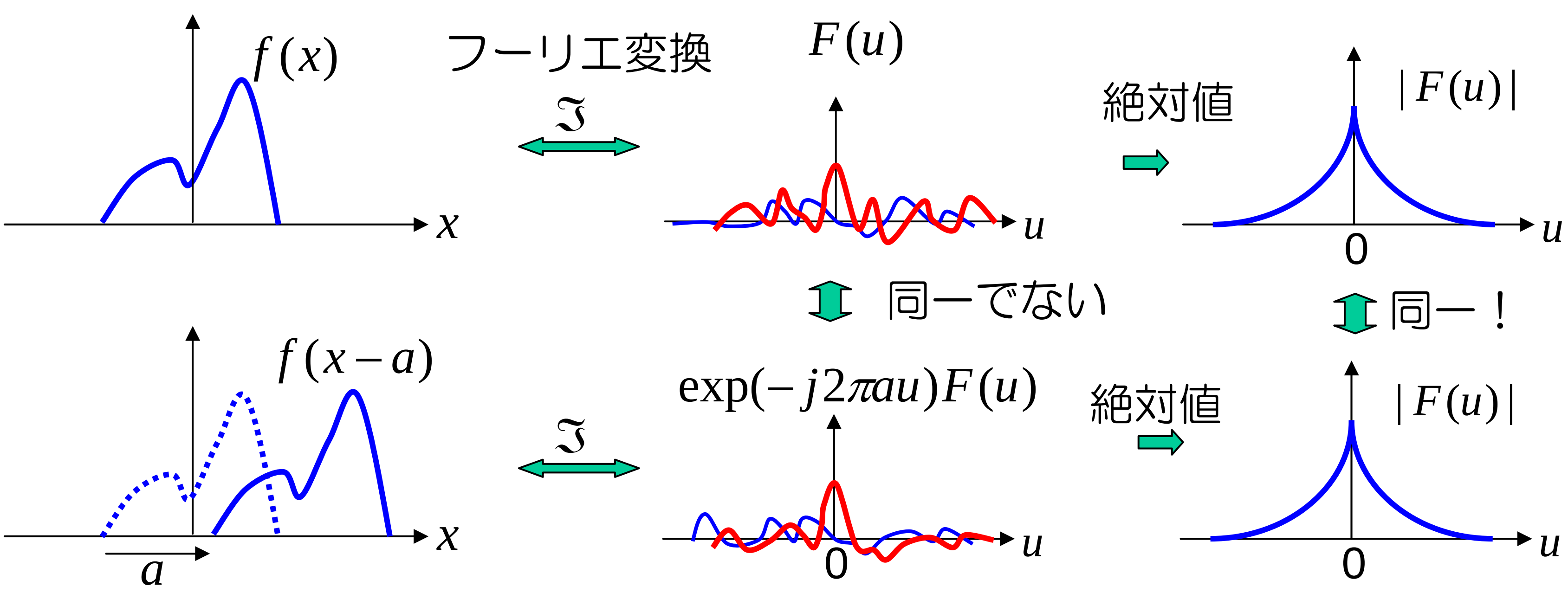
$$F\{f(x-a)\}=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-a)\exp(-j2\pi ux)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-a)\exp(-j2\pi u(x-a+a))dx$$

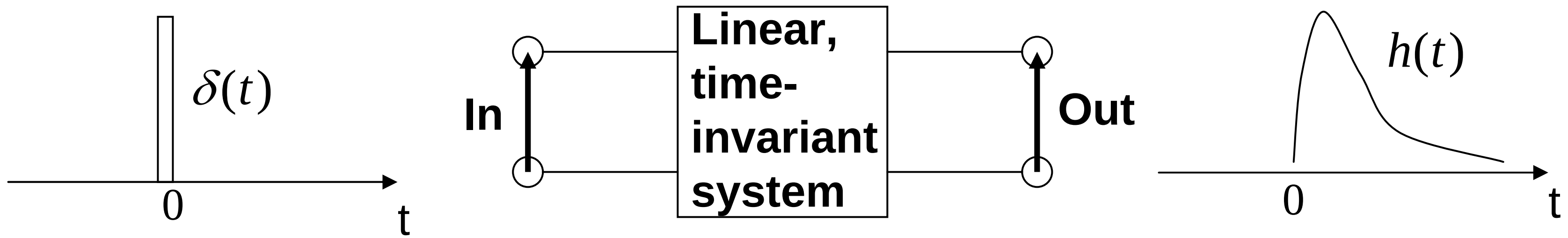
$$=\exp(-j2\pi ua)\int_{-\infty}^{\infty}f(x-a)\exp(-j2\pi u(x-a))dx$$

$$=\exp(-j2\pi ua)F(u)$$

$$\left|\exp(-j2\pi au)F(u)\right|=\left|\exp(-j2\pi au)\right|\left|F(u)\right|=\left|F(u)\right|$$



○ 線形時不変システムで見るコンボリューション

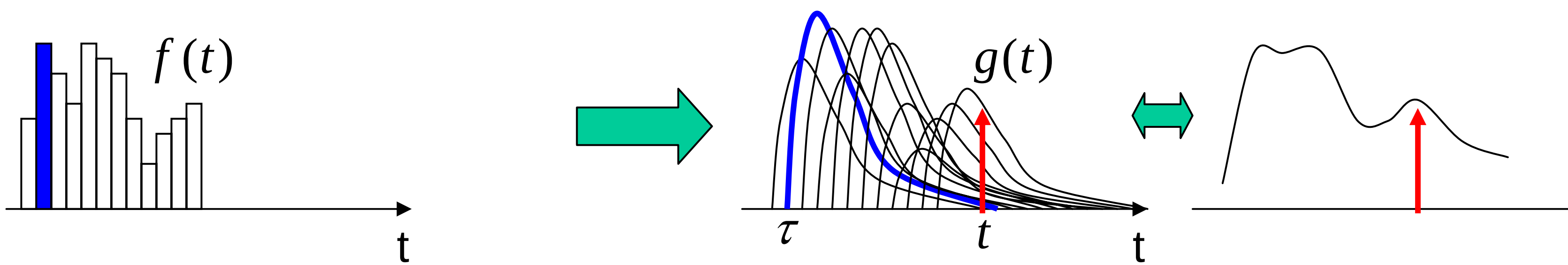


ディラックのデルタ関数
：インパルス関数

デルタ関数入力に対する応答：
インパルス応答

入力信号

出力信号

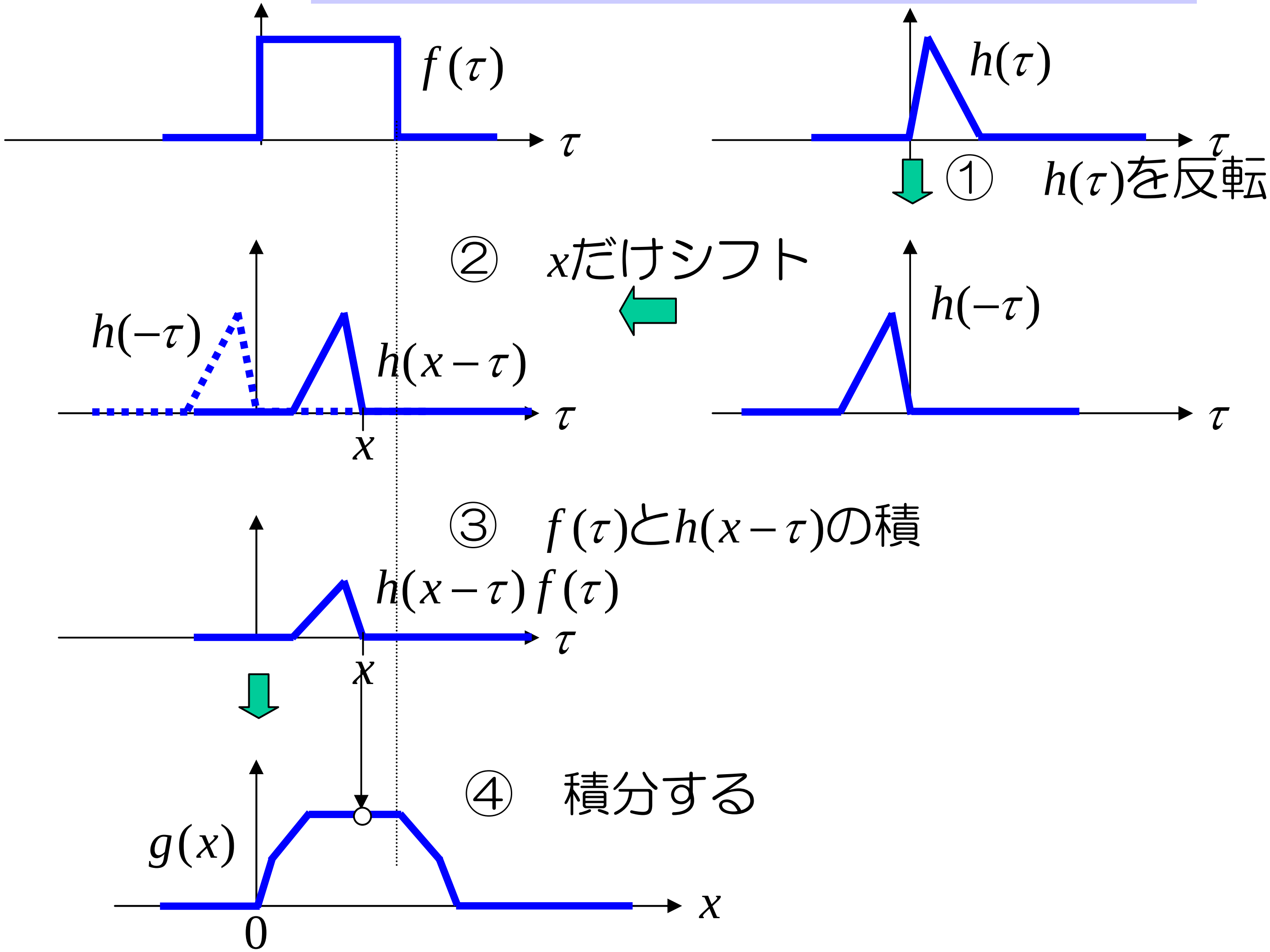


出力信号は入力信号と
インパルス応答との
<u>コンボリューション</u>で
表される.

$$g(t) = \int h(t-\tau) f(\tau) d\tau$$
$$= h(t) * f(t)$$

○ コンボリューションの幾何学的な説明

連続系での定義 $$g(x) \equiv h(x) * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x-\tau) f(\tau) d\tau$$



○ コンボリューション定理

コンボリューション定理：

実空間で，コンボリューションの関係にあるとき，すなわち，

$$g(x)=\int_{-\infty}^{\infty} h(x-\tau)f(\tau)d\tau$$
$$=h(x)*f(x)$$

フーリエ空間では，それぞれのフーリエ変換の積であらわされる．

$$G(u)=F(u)H(u)$$

証明：

$$G(u)=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\exp(-j2\pi ux)dx$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(x-\tau)f(\tau)d\tau\right]\exp(-j2\pi ux)dx$$

ここで $x-\tau=x'$ とおけば

$dx\to dx'$ 積分範囲は－∞から∞で変わらず.

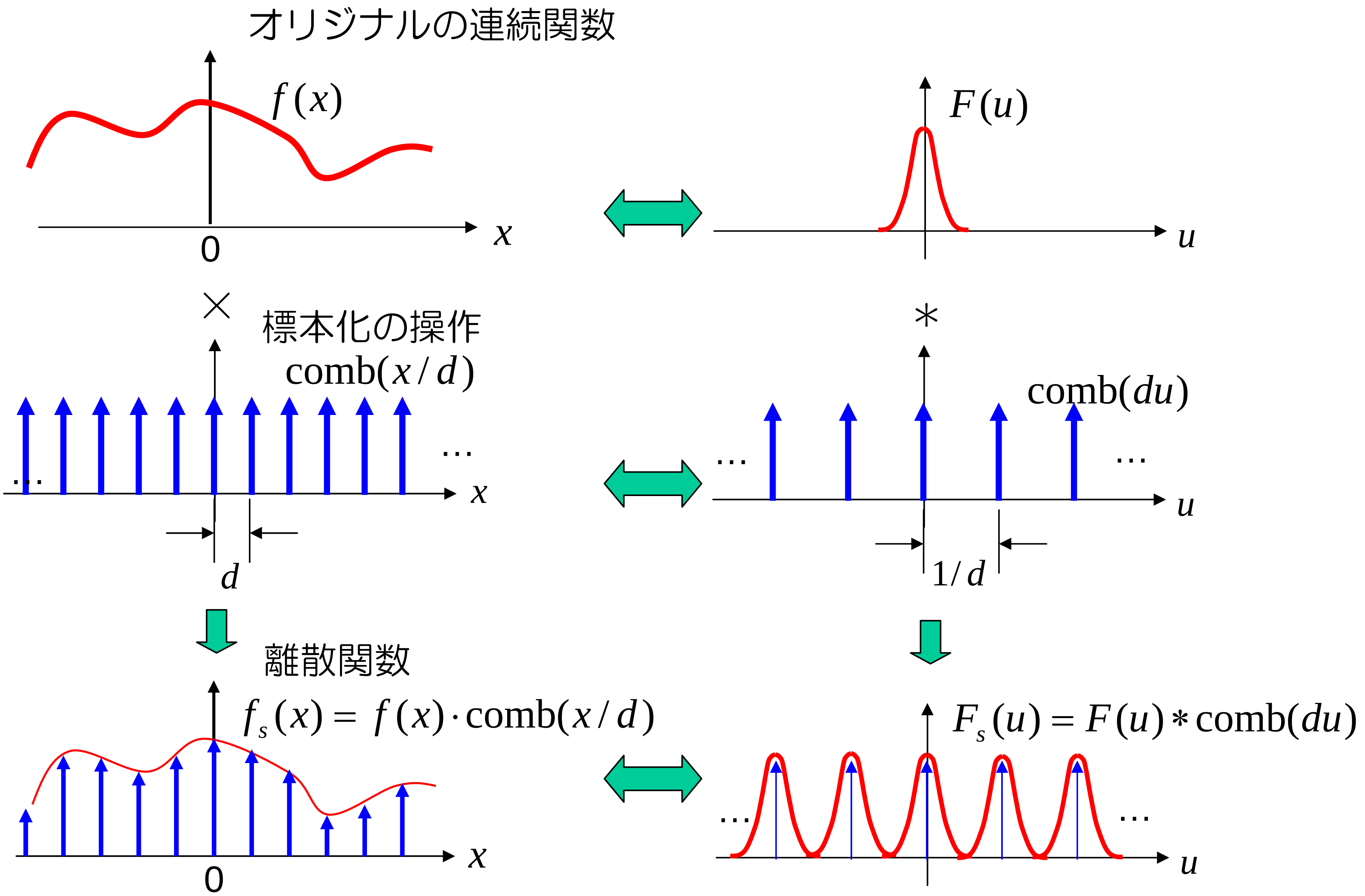
$$G(u)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(x')f(\tau)d\tau\right]\exp(-j2\pi u(x'+\tau))dx$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x')\exp(-j2\pi ux')dx'\,f(\tau)\exp(-j2\pi u\tau)d\tau$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty} h(x')\exp(-j2\pi ux')dx'\times\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\exp(-j2\pi u\tau)d\tau$$
$$=H(u)F(u)$$

重要なまとめ

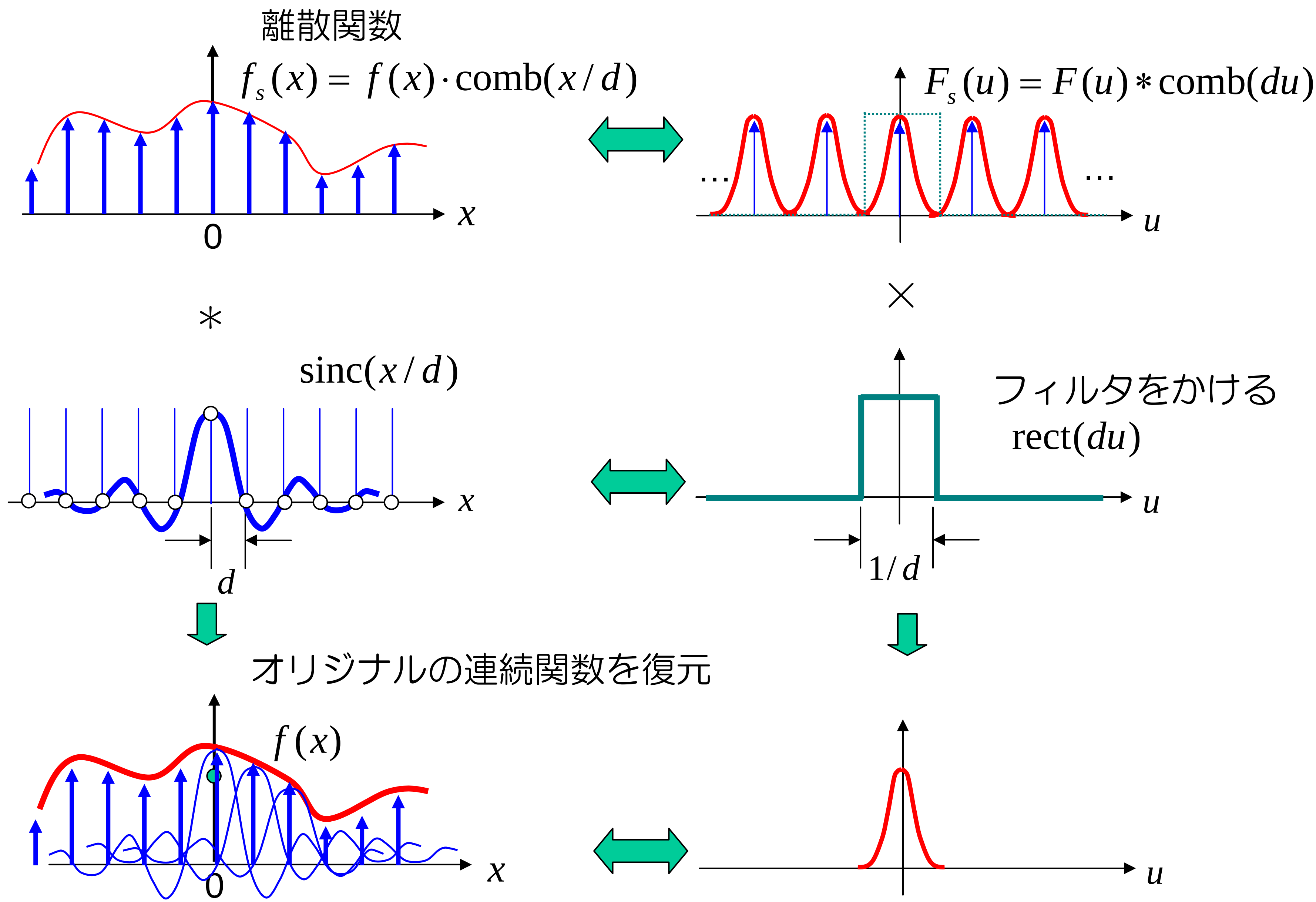
コンボリューション⇔積	積⇔コンボリューション
$h(x)*f(x)\overset{\Im}{\Leftrightarrow}H(u)F(u)$	$h(x)f(x)\overset{\Im}{\Leftrightarrow}H(u)*F(u)$

△

サンプリング定理を理解する１

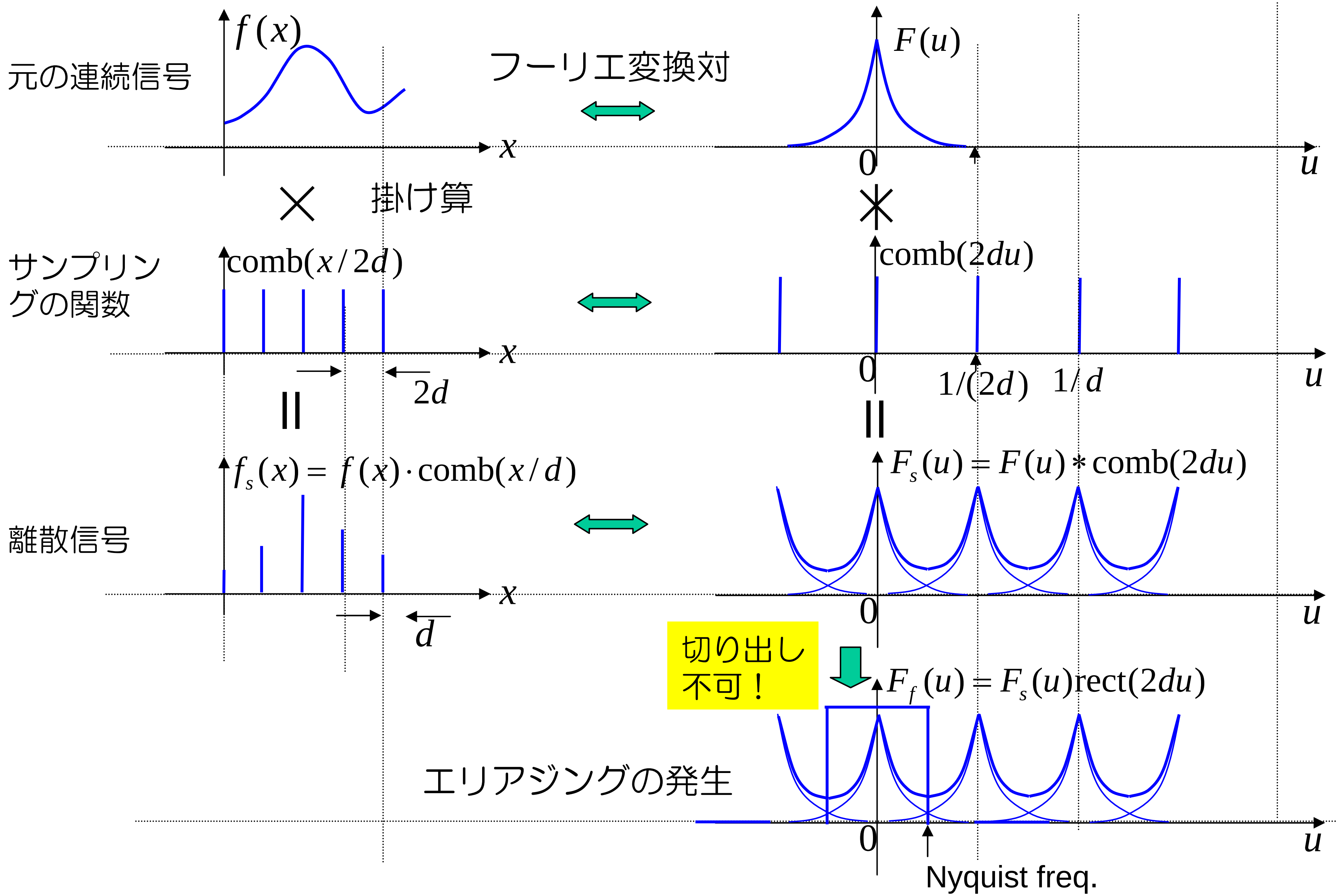


△ サンプリング定理を理解する2



△

エリアジング


元の連続信号
$f(x)$
x
フーリエ変換対
$F(u)$
0
u
掛け算
$\times$
$*$
サンプリングの関数
$\mathrm{comb}(x/2d)$
x
$2d$
$\mathrm{comb}(2du)$
0
$1/(2d)$
$1/d$
u
離散信号
$f_s(x) = f(x) \cdot \mathrm{comb}(x/d)$
x
d
$F_s(u) = F(u) * \mathrm{comb}(2du)$
0
u
切り出し不可！
$F_f(u) = F_s(u)\mathrm{rect}(2du)$
エリアジングの発生
0
u
Nyquist freq.

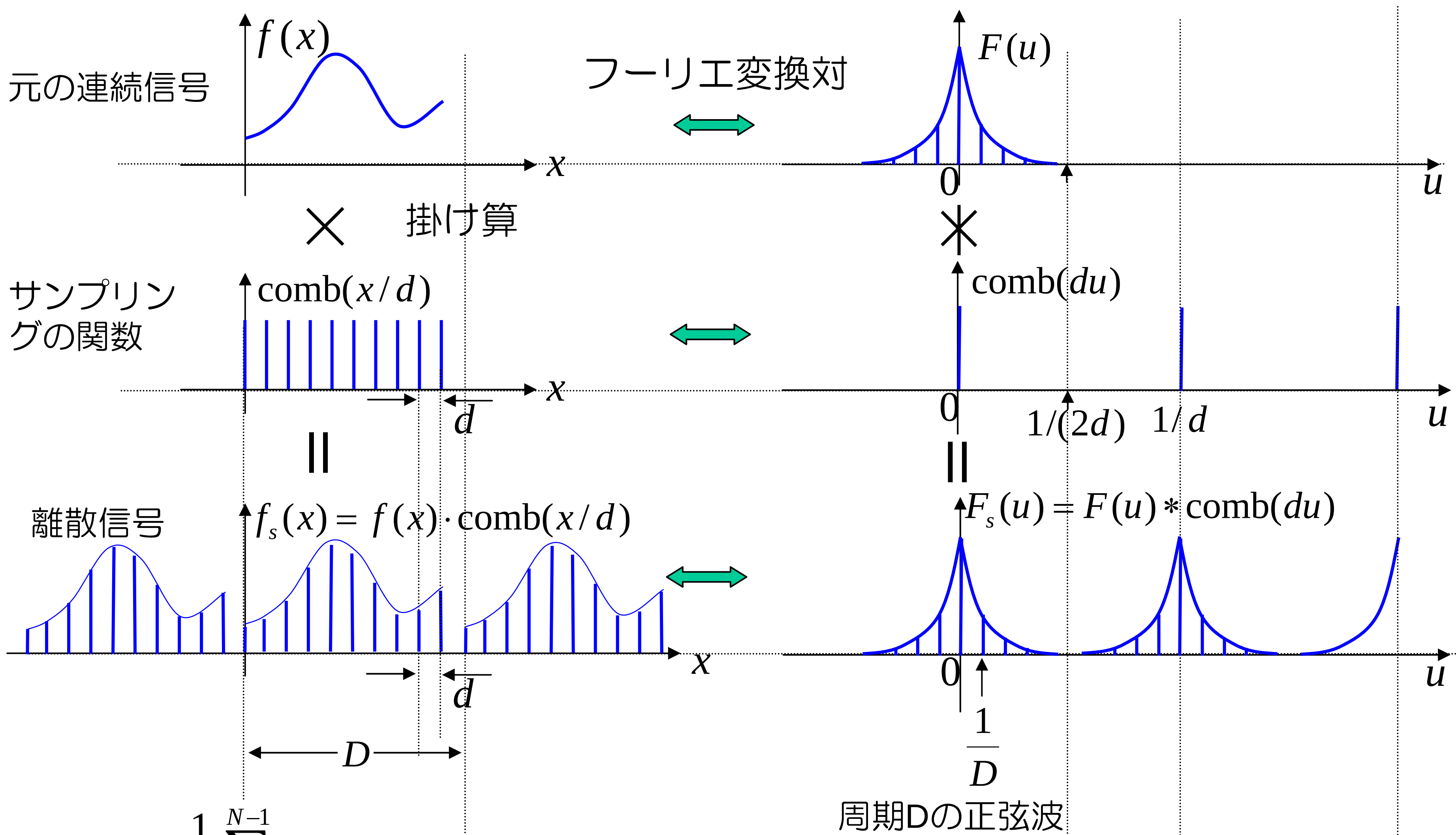
△

フーリエ変換

講義内容

- ■１次元フーリエ変換
  - ■ベクトル・関数の直交性
  - ■フーリエ級数
  - ■１次元フーリエ変換
  - ■代表的なフーリエ変換対
  - ■フーリエ変換の諸性質
  - ■コンボリューション（たたみこみ積分）
  - ■サンプリング定理
  - ■１次元離散フーリエ変換
- ■２次元フーリエ変換
  - ■空間周波数の概念
  - ■２次元フーリエ変換
  - ■代表的な２次元フーリエ変換対
  - ■２次元離散フーリエ変換

離散フーリエ変換の概念



$$F(u) = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} f(x)\exp(-j2\pi ux/N)$$

Dの範囲に対して，基底関数を掛けてフーリエ成分を計算しているということは，暗黙のうちに上記のような実空間信号の周期性を仮定していることになる．