

## 講義内容

- マッチング (位置合わせ) の評価関数  
相互相関 (正規化相互相関)  
2乗誤差
- オプティカルフロー

相関演算は以下の式で定義される。

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h^*(\tau - x) f(\tau) d\tau$$

$$= h^*(x) \otimes f(x)$$

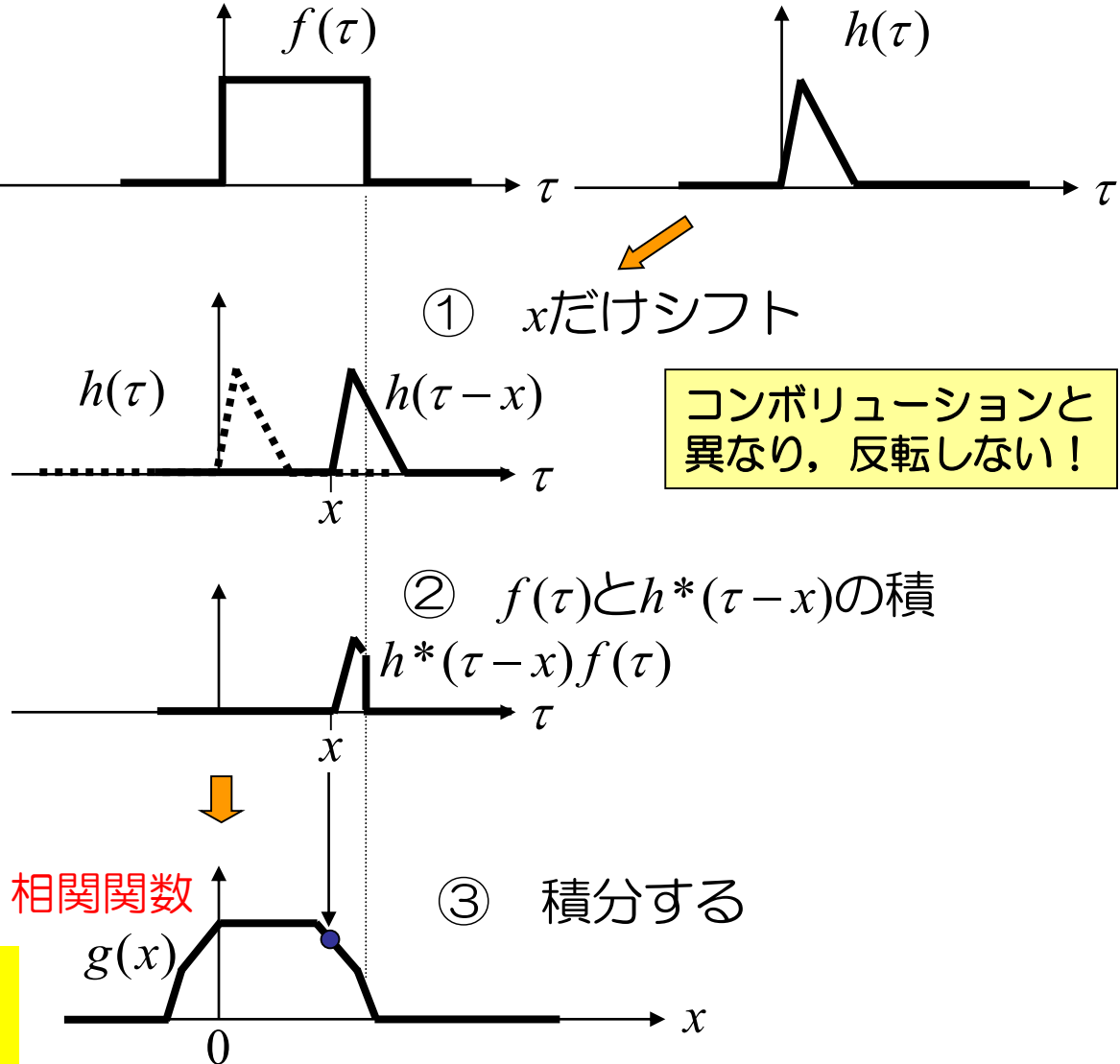
$g(x)$ を相関関数と呼ぶ。  
(\*印は複素共役を意味する)

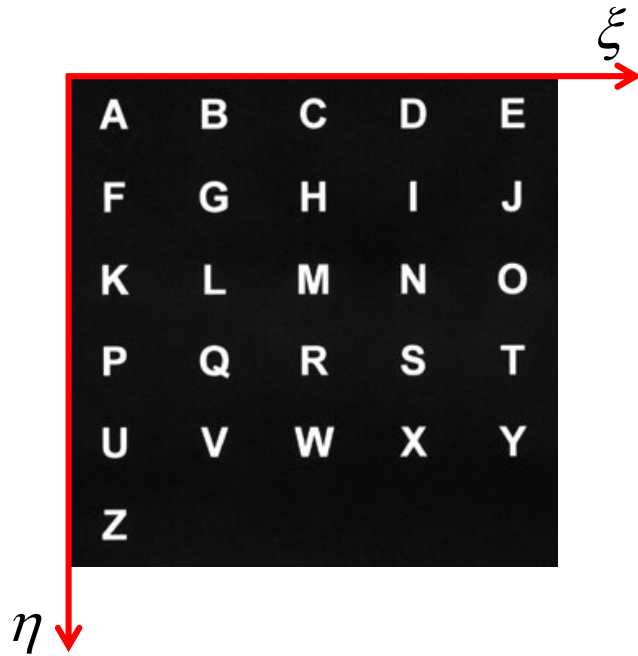
$h(x)$ が実関数なら

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau - x) f(\tau) d\tau$$

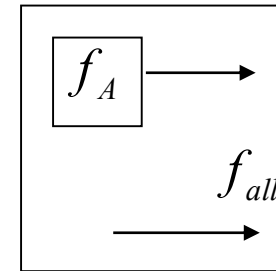
$$= h(x) \otimes f(x)$$

パターンマッチング，対応領域の検出などに利用される。





A



左の画像の中から、上の文字“A”を  
相関演算を用いて探す。



2次元の相関演算

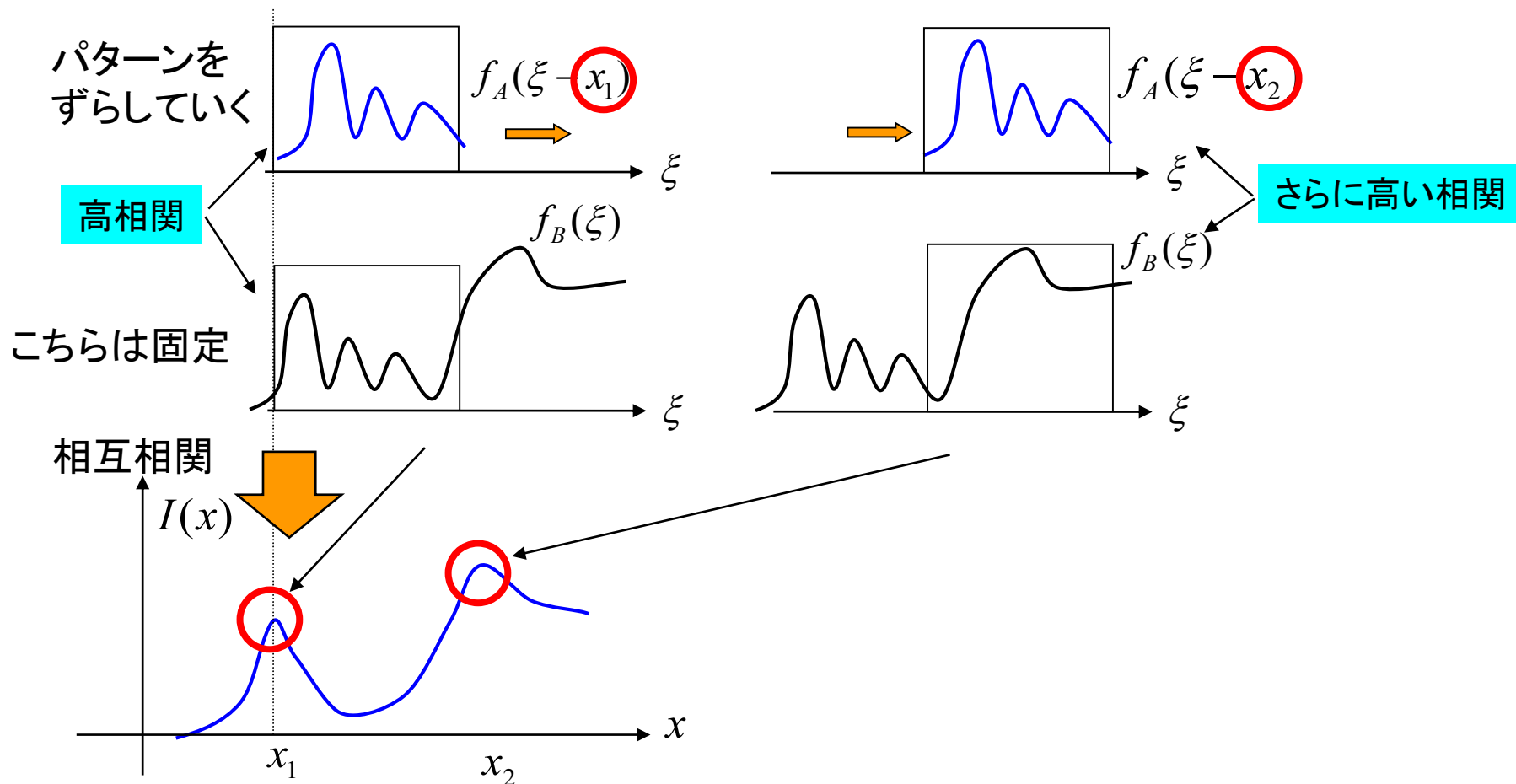
$$\begin{aligned} g(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_A(\xi - x, \eta - y) f_{all}(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ &= f_A(x, y) \otimes f_{all}(x, y) \end{aligned}$$



# 単なる相互相関を用いた場合の問題点: 1次元での説明

$$I(x) = \sum_{\xi \in R} f_A(\xi - x) f_B(\xi)$$

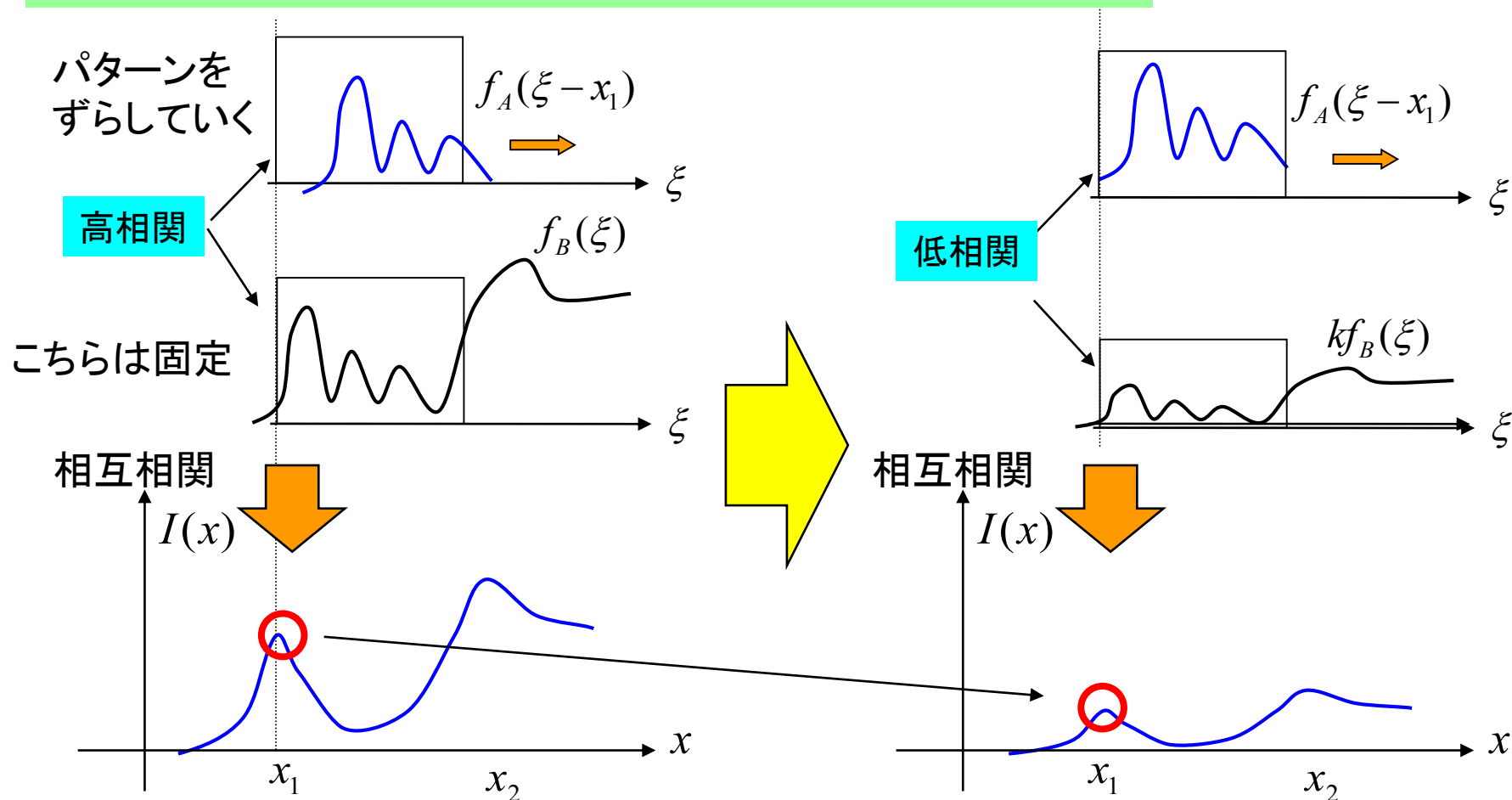
もともと濃淡パターン的一致していない部分でも高相関を与える場合がある



# 単なる相互相関を用いた場合の問題点：1次元での説明

$$I(x, y) = \sum_{\xi, \eta \in R} f_A(\xi - x, \eta - y) f_B(\xi, \eta)$$

一方の画像の輝度が全体的に高くなる(低くなる)など、変化してしまった場合に不正確となる



# 正規化相互相関によるマッチング: 1次元での説明

相互相関(実関数の場合)を離散系で再定義:

$$I(x) = \sum_{\xi=1}^m f_A(\xi - x) f_B(\xi)$$

正規化相互相関(NCC: normalized cross correlation):

$$\begin{aligned}
 I_{NCC}(x) &= \frac{\sum_{\xi=1}^m (f_A(\xi - x) - \bar{f}_A)(f_B(\xi) - \bar{f}_B)}{\sqrt{\sum_{\xi=1}^m (f_A(\xi - x) - \bar{f}_A)^2} \sqrt{\sum_{\xi=1}^m (f_B(\xi) - \bar{f}_B)^2}} \\
 &= \sum_{\xi=1}^m \frac{(f_A(\xi - x) - \bar{f}_A)}{\sqrt{\sum_{\xi=1}^m (f_A(\xi - x) - \bar{f}_A)^2}} \cdot \frac{(f_B(\xi) - \bar{f}_B)}{\sqrt{\sum_{\xi=1}^m (f_B(\xi) - \bar{f}_B)^2}} \\
 &\equiv \sum_{\xi=1}^m f_A^{(N)}(\xi - x) f_B^{(N)}(\xi) \quad \longleftarrow \text{表現の定義}
 \end{aligned}$$

各計算領域において、平均値を引き、標準偏差で割った信号に対して相関の計算を行う。

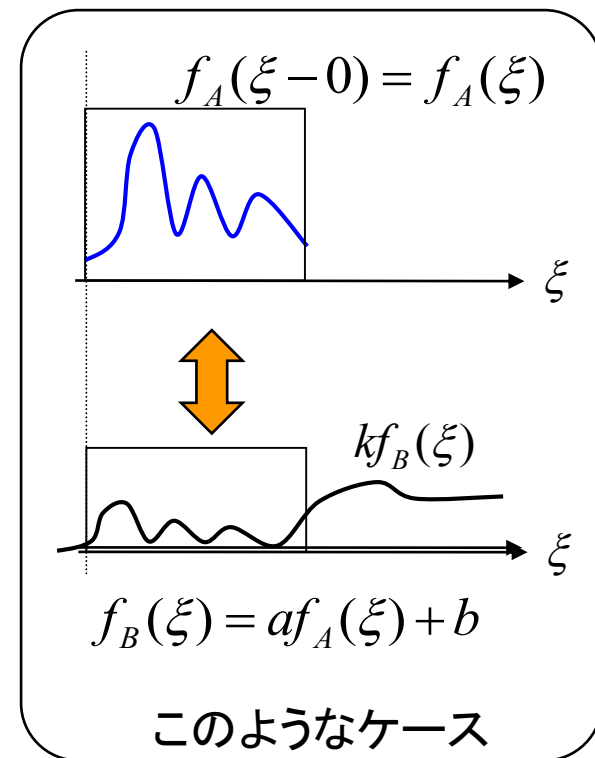
$$I_{NCC}(x) = \frac{\sum_{\xi=1}^m (f_A(\xi-x) - \bar{f}_A)(f_B(\xi) - \bar{f}_B)}{\sqrt{\sum_{\xi=1}^m (f_A(\xi-x) - \bar{f}_A)^2} \sqrt{\sum_{\xi=1}^m (f_B(\xi-x) - \bar{f}_B)^2}}$$

において、簡単のために以下のような状況を考える。

$$x = 0$$

$$f_B(\xi) = af_A(\xi) + b \quad \text{ただし } a, b \text{ は } 0 \text{ でない定数。}$$

このとき、 $I_{NCC}$  を計算してみよ。



# 正規化相互相関によるマッチング

相互相関(実関数の場合)を離散系で再定義:

$$I(x, y) = \sum_{\xi, \eta \in R} f_A(\xi - x, \eta - y) f_B(\xi, \eta)$$

正規化相互相関(NCC: normalized cross correlation):

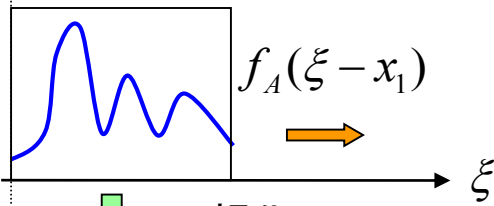
$$\begin{aligned} I_{NCC}(x, y) &= \frac{\sum_{\xi, \eta \in R} (f_A(\xi - x, \eta - y) - \bar{f}_A)(f_B(\xi, \eta) - \bar{f}_B)}{\sqrt{\sum_{\xi, \eta \in R} (f_A(\xi - x, \eta - y) - \bar{f}_A)^2} \sqrt{\sum_{\xi, \eta \in R} (f_B(\xi, \eta) - \bar{f}_B)^2}} \\ &= \sum_{\xi, \eta \in R} \frac{(f_A(\xi - x, \eta - y) - \bar{f}_A)}{\sqrt{\sum_{\xi, \eta \in R} (f_A(\xi - x, \eta - y) - \bar{f}_A)^2}} \cdot \frac{(f_B(\xi, \eta) - \bar{f}_B)}{\sqrt{\sum_{\xi, \eta \in R} (f_B(\xi, \eta) - \bar{f}_B)^2}} \\ &\equiv \sum_{\xi, \eta \in R} f_A^{(N)}(\xi - x, \eta - y) \cdot f_B^{(N)}(\xi, \eta) \longleftarrow \text{表現の定義} \end{aligned}$$

各計算領域において、平均画素値を引き、標準偏差で割った画像に対して相関の計算を行う。

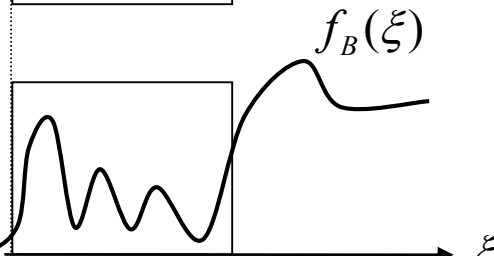
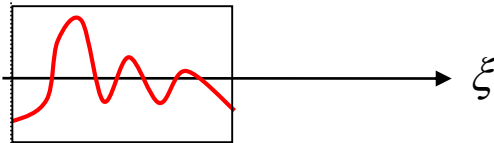


# 正規化の効果

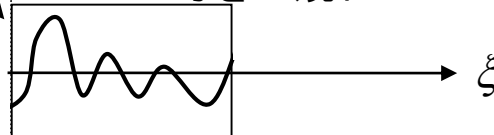
$$I_{NCC}(x, y) = \frac{\sum_{\xi, \eta \in R} (f_A(\xi - x, \eta - y) - \bar{f}_A)(f_B(\xi, \eta) - \bar{f}_B)}{\sqrt{\sum_{\xi, \eta \in R} (f_A(\xi - x, \eta - y) - \bar{f}_A)^2} \sqrt{\sum_{\xi, \eta \in R} (f_B(\xi, \eta) - \bar{f}_B)^2}}$$



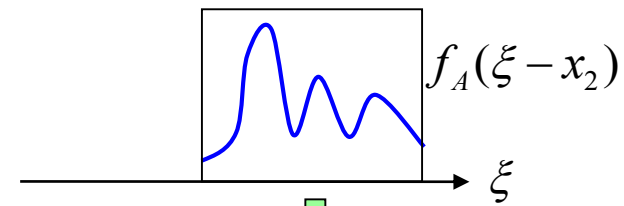
↓ 正規化



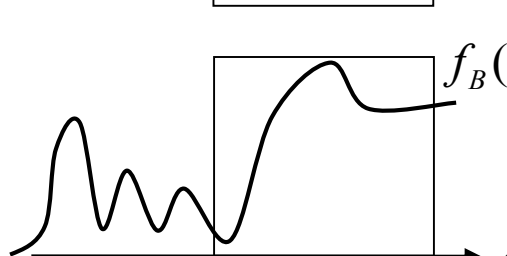
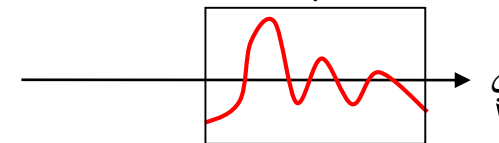
↓ 計算領域の信号を正規化



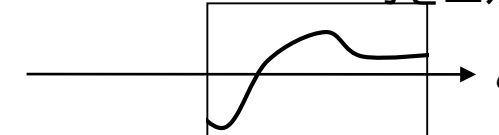
高相関



↓ 正規化



↓ 計算領域の信号を正規化



低相関

# 相互相関のベクトルの解釈

$$I(x, y) = \sum_{\xi, \eta \in R} f_A(\xi - x, \eta - y) f_B(\xi, \eta)$$

$$\{f_A(\xi - x, \eta - y), |(\xi, \eta) \in R\}$$



1列に並べる

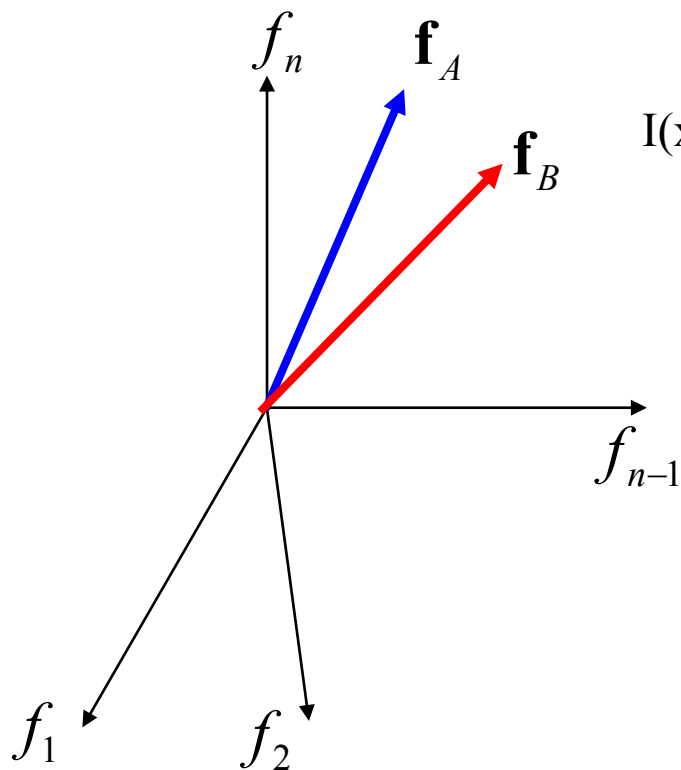
$$\mathbf{f}_A = [f_{A,1} \quad f_{A,2} \quad \cdots \quad f_{A,n}]$$

$$\{f_B(\xi, \eta), |(\xi, \eta) \in R\}$$



1列に並べる

$$\mathbf{f}_B = [f_{B,1} \quad f_{B,2} \quad \cdots \quad f_{B,n}]$$



$I(x, y)$ はベクトルの内積演算に相当する.



# 2乗誤差と相関演算との関係

## 相互相関(離散系)

$$I(x, y) = \sum_{\xi, \eta \in R} f_A(\xi - x, \eta - y) f_B(\xi, \eta)$$

## 正規化相互相関(離散系)

$$I^{(N)}(x, y) = \sum_{\xi, \eta \in R} f_A^{(N)}(\xi - x, \eta - y) f_B^{(N)}(\xi, \eta)$$

## 2乗誤差の総和

$$D(x, y) = \sum_{\xi, \eta \in R} \{f_A(\xi - x, \eta - y) - f_B(\xi, \eta)\}^2$$

$$\begin{aligned} D(x, y) &= \sum_{\xi, \eta \in R} \{f_A(\xi - x, \eta - y) - f_B(\xi, \eta)\}^2 \\ &= \sum_{\xi, \eta \in R} \{f_A(\xi - x, \eta - y)\}^2 \\ &\quad + \sum_{\xi, \eta \in R} \{f_B(\xi - x, \eta - y)\}^2 \\ &\quad - 2 \sum_{\xi, \eta \in R} f_A(\xi - x, \eta - y) f_B(\xi, \eta) \end{aligned}$$

# パターン認識: マッチング・レジストレーション

## 講義内容

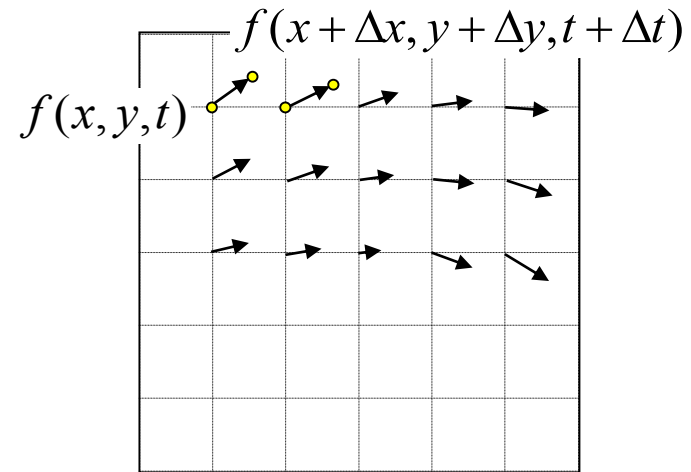
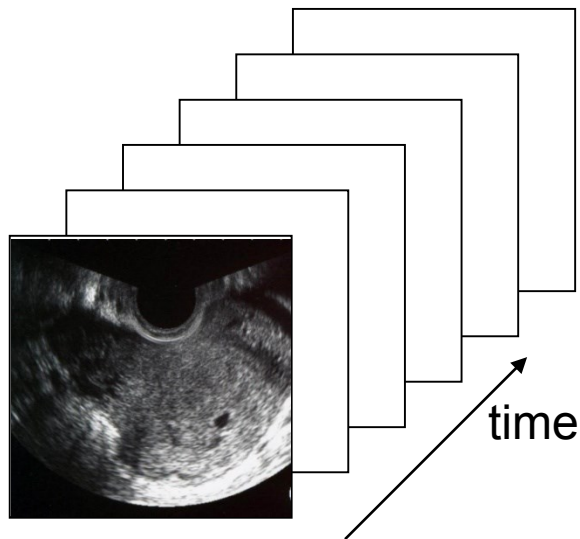
- マッチング (位置合わせ) の評価関数
  - 相互相関 (正規化相互相関)
  - 2乗誤差
- オプティカルフロー

# オプティカルフロー

勾配法: 被写体の動きを動画像の時空間微分から推定するための方法

特徴:

対応点(特徴点)の検出を行うことなしに、  
各局所領域の移動先を求める。



欠点

次のような場合には精度が悪い

- ・濃度変化の少ない被写体
- ・急激な濃度変化のある被写体(エッジ部分など)

# オプティカルフローの原理

## 1次元での説明

- 仮定
1. 物体上の点の明るさは移動後も変化しない。
  2. 画素値の空間的な変化は緩やかである。

仮定1より,

$$f(x, t) = f(x + \Delta x, t + \Delta t)$$

右辺をテイラー展開すると

$$f(x + \Delta x, t + \Delta t) = f(x, t) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t + \varepsilon$$

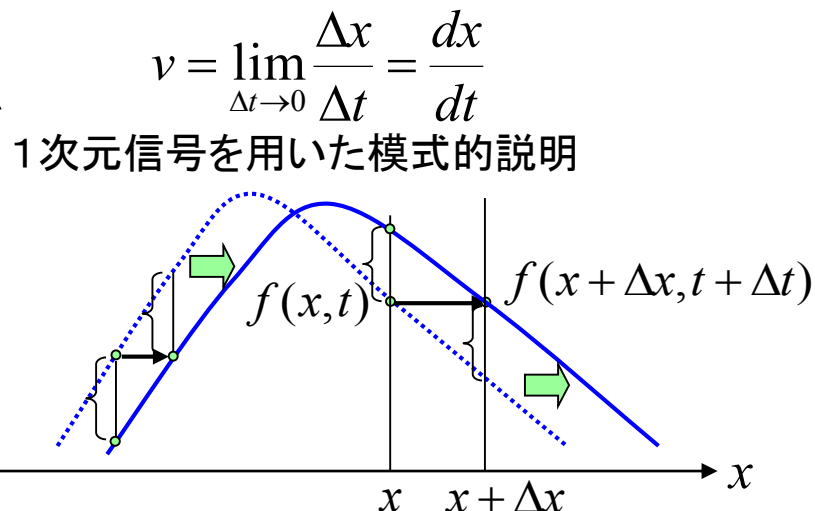
ここで $\varepsilon$ は高次の項であるがこれを無視し、両辺を $\Delta t$ で割り、 $\Delta t \rightarrow 0$ とすると

$$\frac{\partial f}{\partial x} v + f_t = 0 \quad \text{ただし} \quad v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

ここで,

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} : \text{位置} x \text{での画素値の微係数} \\ f_t : \text{位置} x \text{での画素値の時間変化量} \end{cases}$$

であり、動画像より算出可能である。これを用いて上の方程式を解けば、 $v$ が得られる。



## Lucas-Kanade法\*

注目画素近傍の小領域内各点でオプティカルフロー $v$ が等しいと仮定できるなら、以下の式を満たす $v$ を回帰分析により求める方が安定している。

$$\sum_{r \in R} \left[ \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) v + \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) \right]^2 \rightarrow \min.$$

\*) B. D. Lucas and T. Kanade (1981), An iterative image registration technique with an application to stereo vision. Proceedings of Imaging Understanding Workshop, pp 121-130

# オプティカルフローの原理

## 2次元での説明

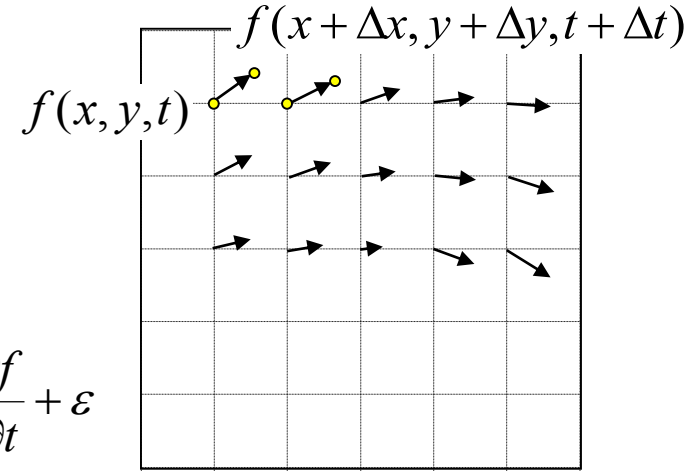
- 仮定 1. 物体上の点の明るさは移動後も変化しない.  
2. 画素値の空間的な変化は緩やかである.

仮定1より,

$$f(x, y, t) = f(x + \Delta x, y + \Delta y, t + \Delta t)$$

右辺をテイラー展開すると

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y, t + \Delta t) = f(x, y, t) + \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f}{\partial y} + \Delta t \frac{\partial f}{\partial t} + \varepsilon$$



ここで $\varepsilon$ は高次の項であるがこれを無視し, 両辺を $\Delta t$ で割り,  $\Delta t \rightarrow 0$ とすると

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + f_t = (\nabla f)^t \mathbf{u} + f_t = 0 \quad \text{ここで} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dx/dt \\ dy/dt \end{bmatrix}$$

ここで求めたいのは変位ベクトル $\mathbf{u}$ であり,  $f$ の $x$ や $y$ での偏微分はその位置での差分, また $f_t$ は位置 $(x, y)$ でのフレーム間差分により得られる. 実際には, 注目画素位置の近傍の小領域 $R$ で, 以下の式を満たす $\mathbf{u}$ を回帰分析により求める方法が考えられる.

$$E = \sum_{r \in R} ((\nabla f)^t \mathbf{u} + f_t)^2$$

3次元の場合も同様の考え方で変位ベクトルが求まる.